PACKAGE R PGM2 POUR LA CONSTRUCTION DE PLANS NUMÉRIQUES VIA DES PLANS EMBOITÉS EN BLOCS INCOMPLETS ÉQUILIBRÉS RÉSOLVABLES

Abla Boudraa [1] & Z. Gheribi-Aoulmi [2]

[1] *Département des Mathématiques, Constantine 1, Algerie*
abla-boudraa@hotmail.fr
[2] *Département des Mathématiques, Constantine 1, Algerie*
gheribiz@yahoofr

Résumé. Dans de nombreuses expériences numériques, les plans uniformes sont très utilisés. Dans notre communication, nous proposons un package R PGM2 de construction de plans uniformes à partir de plans emboités en blocs incomplets équilibrés, eux mêmes obtenus à partir d'une géométrie projective finie PG(m,2). Nous illustrons la méthode par un exemple en partant d'une PG(3,2).

Mots-clés. Plan en blocs incomplets équilibré résolvable, plan uniforme, géométrie projective.

Abstract. In many numerical experiments, the uniform designs are very used. In our work, we propose an R-package PGM2 for the construction of uniform designs starting from nested resolvable designs of balanced incomplete blocks associated by balanced incomplete designs which obtained by finite projective geometry PG (m, 2). Our method is illustrated by an example staring from a PG (3, 2).

Keywords. Balanced incomplete block design, uniform design, projective geometry.

1 Introduction

Les plans d'expériences uniformes sont une sorte de space-filling design proposés initialement par Fang (1980). Leurs multiples applications dans divers domaines scientifiques ou industrielles les laissent d'actualité; ainsi donc la construction et l'obtention de plans uniformes particuliers ont motivé notre démarche. Dans ce qui suit, nous rappelons les résultats développs dans [1]. Ils consistent à décrire le développement d'une méthode de construction récursive de plans en blocs incomplets résolvables à partir de géométries projectives de dimensions variables et définies sur un corps de Galois de caractéristique p [4]. Par adjonction de la RBIBD method [2], nous soutirons une série de plans uniformes dont les niveaux des facteurs sont de la forme pn, n étant l'étape de la récurrence. Le R-package, R PGM2, que nous proposons dans notre communication, génère les plans uniformes associés lorsque p= 2.

Définitions

1. Un plan en blocs incomplets équilibré, noté B.I.E (b, t, r, k, λ) est un arrangement de " t" traitement dans "b " blocs de taille "k" et vérifiant les conditions suivantes :

Chaque traitement " t_i" a lieu au plus une fois dans un bloc.

Chaque traitement "t_i" a lieu dans " r" blocs.

Chaque paire de traitements $(t_i, t_j\ )$ pour i $\neq$ j a lieu à la fois dans "λ" blocs. " λ" étant une constante, tel que: $r * v = k * b$ et $\lambda(v-1) = r(k-1)$.

Il est dit résolvable si ses blocs peuvent être partitionnés en "r " ensembles de blocs appelés classes parallèles (c-a-d, b est un multiple de " r "), tel que chaque pair de traitement apparait une seule fois dans chaque classe parallèle.

2. Le plans uniforme noté $U(v, q^r)$ est une matrice de " v" lignes (correspondant aux nombre d'essais) et " r" colonnes (correspondant aux facteurs) à q niveaux chacun, sachant que chaque modalité $\{1, ..., q\}$ apparait le même nombre de fois dans chaque colonne.

Théorème 1

Etant donnée une géométrie projective $\mathcal{V}_m$ définie sur un corps de Galois de caractéristique p $GF(p)$.

Pour tout $n = 2, \ldots, m-1$:

i) Le système de sous variétés de génération d'ordre n de dimension $m_n = m - n$, est un plan en blocs incomplets équilibré et symétrique. Son plan résiduel est un plan en blocs incomplets résolvable.

ii) L'union de tous les plans en blocs incomplets résolvables de la même génération n $(n < m)$ est un plan résolvable noté $\mathcal{R}^*_n(\nu^*_1, b^{(n)}_F, r^{(n)}_F, k^{(n)}_F, \lambda^{(n)}_F)$ et de paramètres :

$$v^*_1 = p^m;$$

$$b^{(n)}_F = \prod_{i=1}^{i=n} b^*_i = \prod_{i=1}^{i=n} (p + p^2 + \ldots + p^{m-(i-1)});$$

$$r^{(n)}_F = \prod_{i=1}^{i=n} r^*_i = \prod_{i=1}^{i=n} (1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-i});$$

$$k^{(n)}_F = k^*_n = p^{m-n};$$

$$\lambda^{(n)}_F = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda^*_i = \prod_{i=1}^{i=n} (1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-(i+1)}) .$$

Théorème 2

Etant donnée une géométrie projective $\mathcal{V}_m$ définie sur un corps de Galois de caractéristique p $GF(p)$.

i) Il existe un plan résolvable noté : $\mathcal{Q}_n^*(\nu_1^*, b_n^{**}, r_n^{**}, k_n^{**}, \lambda_n^{**})$, dérivé du plan $\mathcal{R}_n^* \left(\nu_1^*, b_F^{(n)}, r_F^{(n)}, k_F^{(n)}, \lambda_F^{(n)}\right)$, de paramètres :

$v_1^* = p^m$; $b_n^{**} = \frac{b_F^{(n)}}{\alpha}$; $r_n^{**} = \frac{r_F^{(n)}}{\alpha}$; $k_n^{**} = k_n^* = p^{m-n}$ et $\lambda_n^{**} = \frac{\lambda_F^{(n)}}{\alpha}$ avec

$$\alpha = \prod_{i=1}^{i=n-1} N(m, m_i, m_{i+1}) = \prod_{i=1}^{i=n-1} (1 + p + p^2 + \ldots + p^i)$$

ii) Les plans en blocs résolvables réduits $\mathcal{Q}_n^*(\nu_1^*, b_n^{**}, r_n^{**}, k_n^{**}, \lambda_n^{**})$ engendrent une série de plans uniformes symétriques à $v_1^*{=}p^m$ essais et r_n^{**} facteurs, chacun à p^n modalités, $n = 1, ..., m-1$, notés : $U(v^*; (p^n)^{r_n^{**}})$.

Pour obtenir la configuration de ces plans (BIB, Résolvable et Uniforme), nous avons réalisé un package R PGM2.

2 Le R-package PGM2

Le R package PGM2 est composé d'une série de fonction suivantes : BIB , Gen, Resolvable, Steps, Uniforme. Nous les décrivons ci-dessous.

2.1 BIB(m)

La fonction BIB correspondant à la construction des PBIE à partir de la PG(m,2) L'argument de cette fonction est:

m: la dimension de la géométrie projective d'ordre p= 2. La fonction BIB offre la configuration de ce PBIE avec ses paramétres :v, r, b, k, λ.

2.2 Gen(n, mat)

La fonction Gen correspondant à la construction des PBIE à partir d'une géométrie projective de dimension $m-1$. Les arguments de cette fonction sont:

n : Le bloc de sous-variété que nous supprimons.

Mat: la matrice de PBIE.

2.3 Resolvable (n, mat)

La fonction Resolvable correspondant à la construction des PBIER à partir des PBIE Les arguments de cette fonction sont:

n: Le bloc de sous-variété que nous supprimons.

Mat: la matrice de PBIE.

BIB: la configuration de PBIER.

2.4 Steps (m, n, stage=all)

La fonction steps donne les différentes étapes des plans emboités à partir d'une géométrie projective. PBIE, PBIE de la deuxiéme génération, PBIER and plan uniforme associé.

Les arguments de cette fonction sont:

m: la dimension de la géométrie projective définie sur GF(2)

n : le bloc de sous-variété que nous supprimons associé au PBIE de la deuxiéme génération.

stage: tape de la récurrence résolue : "all" imprimer tous les plans.

S1: donne la configuration de PBIE de la premire génération.

S2: donne la configuration de PBIE de la deuxiéme génération.

S3: donne la configuration du PBIER.

S4: donne la configuration du plan uniforme associé via résolvable emboité.

2.5 Uniform(mat)

La fonction Uniform correspondant à la construction de plan uniforme à partir de PBIER. Les arguments sont:

mat: la matrice de PBIER.

Cette fonction donne la configuration du plan uniforme associé de paramètres :

N: le nombre d'expériences

F: la dimension du plan.

3 Exemple

Dans une PG(3,2), il y a 15 sous-variétés distinctes de dimension 3.

Le plan en bloc résultant a pour paramètres : $v_1 = b_1 = 15, r_1 = k_1 = 7$ et $\lambda_1 = 3$. Le plan résolvable de $1^{ère}$ génération associé a pour paramètres:

$$v_1^* = 8,\ b_1^* = 14,\ r_1^* = 7,\ k_1^* = 4 \text{ et } \lambda_1^* = 3.$$

De nouveau, chaque sous-variété linéaire de dimension 3, fournit à son tour un plan en blocs de $2^{ème}$ génération de paramètres $v_2 = b_2 = 7, r_2 = k_2 = 3$ et $\lambda_2 = 1$. Un plan résolvable de $2^{ème}$ génération a pour paramètres $(4, 6, 3, 2, 1)$.

L'union de ces plans résolvables de $2^{ème}$ génération, $\mathcal{R}_2^*(\nu_1^*, b_F^{(2)}, r_F^{(2)}, k_F^{(2)},\ \lambda_F^{(2)})$ est un plan résolvable de paramètres:

$$v_1^* = 8,\ b_F^{(2)} = 84,\ r_F^{(2)} = 21,\ k_F^{(2)} = 2 \text{ et } \lambda_F^{(2)} = 3.$$

Tenant compte qu'à l'étape 2, $\alpha = (1+p) = 3$, le plan $\mathcal{Q}_2^*$ a pour paramètres : (8,28 ,7,2,1). Il est nettement plus économique en nombre de blocs et nombre de répétitions et d'occurrence de traitements par rapport à $\mathcal{R}_2^*$.

A partir de ce plan rèsolvable nous pouvons obtenir un plan uniforme noté $U(8,(2^2)^7)$.

La configuration des plans : $\mathcal{Q}_2^*$ et $U(8,(2^2)^{21})$ suivant les sorties du package R PGM2 [3]est la suivante:

```
#RBIB(8,28,7,2,1)
      [,1] [,2]
 [1,]    1    9
 [2,]    5   13
 [3,]    1    5
 [4,]    9   13
 [5,]    1   13
 [6,]    5    9
 [7,]    3   11
 [8,]    7   15
 [9,]    3    7
[10,]   11   15
[11,]    3   15
[12,]    7   11
[13,]    1    3
[14,]    9   11
[15,]    1   11
[16,]    3    9
[17,]    5    7
[18,]   13   15
[19,]    5   15
[20,]    7   13
[21,]    1    7
[22,]    9   15
[23,]    1   15
[24,]    7    9
[25,]    3    5
```

```
[26,]   11   13
[27,]    5   11
[28,]    3   13

#U(8,(2^2)^7)
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7]
[1,]    1    1    1    1    1    1    1
[2,]    3    3    3    1    2    3    4
[3,]    2    1    2    3    3    3    3
[4,]    4    3    4    3    4    1    2
[5,]    1    2    2    2    2    2    2
[6,]    3    4    4    2    1    4    3
[7,]    2    2    1    4    4    4    4
[8,]    4    4    3    4    3    2    1
```

4 conclusion

La méthode que nous avons développée dans cette communication, se caractérise par le fait qu'elle soit récurrente, fournissant ainsi une série de plans en blocs incomplets résolvables emboités. En appliquant la RBIBD method à ces plans, nous avons obtenus une série de plans uniformes, au sens de la discrépance discrète, dont les niveaux de facteurs sont une puissance de la caractéristique p du corps de Galois GF(p) utilisé et de l'étape n de la récurrence. Par ailleurs, le R PGM2 que nous avons décrit, donne exactement la répartition des traitements dans les différents blocs obtenus à chacune des étapes et aussi la configuration des plans uniformes associés. Une généralisation à p impair quelconque est envisageable.

Bibliographie

[1] A.Boudraa, Z.Gheribi-Aoulmi & M.Laib (2013), Recursive Method for Construction of Resolvable Nested Designs and Uniform Designs Associated, IJRRAS 17, 2, 167-176.
[2] K.T. Fang, G.N. Ge, M.Q .Liu and H. Qin (2004) . Construction of uniform designs via super-simple resolvable t-designs. Util. Math. 66, 15-32.
[3] Mohamed Laib, Abla Boudraa and Zoubida Gheribi-Aoulmi (2014). PGM2: Recursive method for construction of nested resolvable designs and uniform designs associated. R package version 1.0. http://CRAN.R-project.org/package=PGM2
[4] Z. Gheribi-Aoulmi and M. Bousszboua, 2005. Recursive methods for construction of balanced n-ary block designs. Serdica Math. J 31, 189-200.