Estimation du drift d'un modèle de type signal plus un bruit à partir d'une observation discrétisée

K. EL WALED, D. DEHAY,
IRMAR, CNRS umr 6625, Université Rennes 2, France
khalil.elwaled@uhb.fr, dominique.dehay@uhb.fr

Résumé

Le but de ce travail est l'estimation paramétrique du drift d'un modèle de type signal plus un bruit à partir d'une observation à instants discrets. Dans un premier temps nous considérons le modèle $d\xi_t = f(t,\theta)dt + \sigma(t)dW_t$, où $f(\cdot,\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont deux fonctions continues, périodiques en t, de période P, θ est un paramètre inconnu ; $\theta \in \mathbb{R}$ et W_t est un mouvement Brownien. Nous utilisons la méthode de maximum de contraste afin d'établir un estimateur consistant de θ. Dans une deuxième partie nous considérons le cas particulier $f(t,\theta) = \theta f(t)$ et nous proposons un estimateur de θ, nous démontrons en suite que cet estimateur possède de bonnes propriétés : la convergence en moyenne quadratique ainsi que la normalité asymptotique.

Mots-clés : Signal périodique, Processus de diffusion, Estimateur de maximum de contraste, Comportement asymptotique des estimateurs.

Abstract

The main goal of this work is the drift estimation of a signal plus noise model given by the following equation $d\xi_t = f(\theta,t)dt + \sigma(t)dW_t$, where the functions $f(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ are continuous and periodic in t. W_t is a Brownian motion, θ is an unknown parameter ; $\theta \in \mathbb{R}$. We study the maximum contrast estimator of θ from discrete time observations, and we establish the consistency of this estimator. We look more precisely at the case when $f(\theta,t)=\theta f(t)$, and then we propose an estimator of θ and we show the mean square convergence and the normality asymptotic property of this estimator.

Keywords : Periodic signal, Diffusion process, Maximum contrast estimator, asymptotic behaviour of estimators.

1 Introduction

L'estimation paramétrique pour des processus de diffusion observés en temps continu a été l'objet de nombreux travaux (voir, par exemple, Ibragimov et Has'minskii, 1981 ; Kutoyants, 1984). Cependant, en réalité, les processus ne sont pas toujours observés en temps continu, c'est pour cette raison que certains auteurs ont considéré de problème d'estimation des estimations paramétriques à partir des observations discrétisées. On peut en citer entre autre, Le Breton, 1976 ; Kasonga, 1988 ; Genon-Catalot, 1990 ; Harison, 1995.

Dans ce travail on considère le modèle de type signal plus un bruit donné par l'équation suivante

$$d\xi_t = f(t,\theta)dt + \sigma(t)dW_t \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

où $f(\cdot,\cdot):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue, périodique en t de période P.
$\sigma(\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue périodique de même période P. θ un paramètre inconnu appartenant à $\mathbb{R}$

Le but est l'estimation du paramètre θ, pour ce faire nous allons suivre la méthode de maximum de contraste.

Supposons que les observations sur l'intervalle $[0,T]$ aient lieu aux instants $t_i := i\Delta_n$, $i \in 0\cdots n-1$, où $\Delta_n = \frac{T}{n}$.

Suivant Genon-Catalot, 1990 on peut approcher la vraisemblance de ce processus par la fonction de contraste suivante

$$U_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\theta)(\xi_{t_{i+1}}-\xi_{t_i}) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i,\theta)\Delta_n. \tag{2}$$

On suppose également que $T = n\Delta_n = N_nP$, $P = p_n\Delta_n$ fixé, $p_n \in \mathbb{N}$, $T = n\Delta_n \to \infty$, $\Delta_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $n = N_np_n$, $N_n \to \infty$, $p_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Dans la deuxième section on va prouver la consistance de d'estimateur $\hat{\theta}$ de θ. Dans une dernière section on considère le cas particulier où $f(t,\theta) = \theta f(t)$, $\sigma = 1$ et on établit la convergence en moyenne quadratique et la propriété de la normalité asymptotique de cet estimateur.

2 Estimation du maximum du contraste

Pour démontrer la consistance de d'estimateur du maximum de contraste, on démontre d'abord que $U_n(t)$ est un contraste. On va donc chercher à démontrer que cette fonction converge en $\mathbb{L}^1(\mathrm{P}_\theta)$ vers la fonction $K(\theta,\theta_0)$ définie ci-dessous par l'équation (4).

Suivant Horison, 1996 on calcule d'abord la quantité suivante $\frac{U_n(\theta)}{n\Delta_n}$.

$$\frac{U_n(\theta)}{n\Delta_n} = \frac{1}{n\Delta_n}\sum_{k=0}^{N_n-1}\sum_{i=0}^{p_n-1} f(t_{i+kp_n},\theta)(\xi_{t_{i+1+kp_n}} - \xi_{t_{i+kp_n}}) - \frac{1}{2n\Delta_n}\sum_{k=0}^{N_n-1}\sum_{i=0}^{p_n-1} f^2(t_{i+kp_n},\theta)\Delta_n.$$

Or $t_i = i\Delta_n$, donc $t_{i+kp_n} = i\Delta + kp_n\Delta_n = i\Delta_n + kP$.

Comme $f(\cdot,\theta)$ est périodique de période P, alors $f(t_{i+kp_n},\theta) = f(t_i,\theta)$, d'après l'équation (1), $\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,\theta)ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s)dW_s$. Donc on a

$$\begin{aligned}
\frac{U_n(\theta)}{n\Delta_n} &= \frac{1}{N_nP}\sum_{k=0}^{N_n-1}\sum_{i=0}^{p_n-1}\left(f(t_i,\theta)\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,\theta)ds + \sigma(s)dW_s^{(kP)}\right)\right) - \frac{1}{2n\Delta_n}\sum_{k=0}^{N_n-1}\sum_{i=0}^{p_n-1} f^2(t_i,\theta)\Delta_n \\
&= \frac{1}{P}\sum_{i=0}^{p_n-1} f(i\Delta_n,\theta)\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n} f(s,\theta)ds - \frac{1}{2P}\sum_{i=0}^{p_n-1} f^2(i\Delta_n,\theta)\Delta_n \\
&\quad + \frac{1}{N_nP}\sum_{k=0}^{N_n-1}\sum_{i=0}^{p_n-1} f(i\Delta_n,\theta)\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n}\sigma(s)dW_s^{(kP)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

où $W_s^{(kP)} = W_{s+kP} - W_{kP}$.

Démontrons la convergence du premier terme dans lemme suivant

Lemme 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{i=0}^{p_n-1} f(i\Delta_n,\theta)\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n} f(s,\theta)ds - \frac{1}{2P}\sum_{i=0}^{p_n-1} f^2(i\Delta_n,\theta)\Delta_n = \frac{1}{2P}\int_0^P f^2(s,\theta)ds.$$

Nous déduisons dans le théorème suivant que $U_n(\theta)$ est un contraste, pour ceci on pose

$$K(\theta, \theta_0) := \frac{1}{2P} \int_0^P (f^2(s, \theta) - f^2(s, \theta_0)) ds. \tag{4}$$

Théorème 1 *En plus de conditions citées ci-dessus supposons que $K(\theta, \theta_0)$ s'annule si et seulement si $\theta = \theta_0$, alors $U_n(\theta)$ est un contraste.*

Donc nous avons en particulier la convergence en $\mathbb{L}^1(\mathrm{P}_\theta)$ qui nous garantit le fait que $U_n(\theta)$ est un contraste dans le sens de Dacunha-Castelle, 1983, Définition 3.2.7.

Pour démontrer la consistance de l'estimateur du maximum du contraste, on utilise le théorème suivant qui est une version du théorème cité dans le livre de Dacunha-Castelle, 1983, Théorème 3.2.8.

Théorème 2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_x)_{x>0}, (\mathrm{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un espace de probabilité. Supposons que nous avons les deux conditions suivantes*

1. *Θ est un compact de $\mathbb{R}$, les fonctions $\theta \longrightarrow U_n(\theta)$, $\theta \longrightarrow K(\theta, \theta_0)$ sont continues ;*
2. *Pour tout $\alpha > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta-\theta'|<\eta} |\frac{U_n(\theta) - U_n(\theta')}{n\Delta_n}| > \alpha \right) = 0.$$

Alors tout estimateur du maximum de contraste est consistant en θ.

3 Cas particulier

Dans cette section étude le cas particulier où $f(t, \theta) = \theta f(t)$, $\sigma(t) = 1$, donc on considère le modèle

$$d\xi_t = \theta f(t) dt + dW_t. \tag{5}$$

Dans le cas continu, l'estimation de la fonction $f(\cdot)$ a été l'objet d'un article Dehay et El Waled, 2013. Pour le paramètre θ des travaux sont en cours. Pour une discrétisation $\{\xi_{t_i}\}$ $i = 0, \cdots, n$ de l'intervalle $[0, T]$ où $t_i = i\Delta_n$, l'approximation de la vraisemblance est donnée par

$$U_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta f(t_i)(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) - \sum_{i=0}^{n-1} \theta^2 f^2(t_i) \Delta_n.$$

(Voir Genon-Catalot, 1990). Donc l'estimateur du maximum du contraste du paramètre θ admet une formule explicite donnée par

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n}. \tag{6}$$

Donc

$$\hat{\theta}_n = \theta + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n}.$$

Nous avons donc.

Proposition 1 *L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est sans biais.*

3.1 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 3 *Sous l'hypothèse que $n\Delta_n$ tend vers ∞ quand n tend vers ∞, et que la fonction $f(\cdot)$ est périodique de période P, l'estimateur $\hat{\theta}_n$ converge en moyenne quadratique vers le paramètre estimé θ. De plus nous avons*

$$\lim_{n\Delta_n \to \infty} n\Delta_n \mathrm{E}\left[|\hat{\theta}_n - \theta|^2\right] = \left(\frac{1}{P}\int_0^P f^2(t)dt\right)^{-1}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[|\hat{\theta}_n - \theta|^2\right] &= \mathrm{E}\left[\hat{\theta}_n - \theta\right]^2 + \mathrm{var}(\hat{\theta}_n) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n}. \end{aligned}$$

Pour finir la preuve on démontre et on utilise le lemme suivant.

Lemme 2 *Pour $f(\cdot)$ une fonction continue périodique de période P définie sur un intervalle $[0,T]$ avec $T = NP$ nous avons*

$$\lim_{n\Delta_n \to \infty} \frac{1}{n\Delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i)\Delta_n = \frac{1}{P}\int_0^P f^2(t)dt.$$

■

3.2 Normalité asymptotique

On pose

$$\bar{\theta}_n := \left(\sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i) \Delta_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{\theta}_n - \theta \right).$$

Donc

$$\bar{\theta}_n \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Bibliographie

[1] Dacunha-Castelle, D., Duflo, M., (1983), Probabilité et Statistique 2, Problèmes à temps continu, Masson.

[2] Dehay, D., El Waled, K., (2013), Nonparametric estimation problem for a time-periodic signal in a periodic noise, Statistics and Probability Letters 83 608–615.

[3] Genon-Catalot, V., (1990), Maximum contrast estimation for diffusion process from discrete observations, Statistics 21 99–116.

[4] Harison, V., (1996), Drift Estimation of a Certain Class of Diffusion Processes from Discrete Observations, Computers Math. Applic. 31 No. 6, 121–133.

[5] Ibragimov, I.A., Has'minskii, R.Z., (1981), Statistical Estimation, Asymptotic Theory, Springer-Verlag, New York.

[6] Kasonga, R.D., (1988), The consistency of a non-linear least squares estimator from diffusion processes, Stoch. Processes and their Appl. 30, 263–275.

[7] Kutoyants, Yu., (1984) Parameter estimation for stochastic processes. In Research and Exposition in Math., 6, Heldermann, Verlg, Berlin.

[8] Le Breton, A., (1976), On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes, Mathematical Programming Studies 5, 124-144.