

NOUVELLE APPROCHE DE L'ENTROPIE SPECTRALE À PARTIR D'UNE TRANSFORMÉE PAR SYNCHROSQUEEZING

Céline Franco ^{1,2,3} & Pierre-Yves Guméry¹ & Anthony Fleury ⁴ & Nicolas Vuillerme ^{2,5}

¹ *UJF-Grenoble 1/CNRS/TIMC-IMAG UMR 5525, Grenoble, F-38041,
(Celine.Franco@imag.fr, Pierre-Yves.Gumery@imag.fr)*

² *Univ. Grenoble-Alpes/CNRS-UJF-UPMF-EPHE/AGIM FRE 3405 (équipe GEM), La
Tronche, 38706 (Nicolas.Vuillerme@agim.eu)*

³ *IDS, 2 av. des puits, 71300 Montceau-les-Mines, France*

⁴ *Univ. of Lille Nord de France, F-59000 Lille et EMDouai, IA, F-59500 Douai, France
(Anthony.Fleury@mines-douai.fr)*

⁵ *Institut Universitaire de France*

Résumé. Cette étude propose une nouvelle approche de l'entropie spectrale basée sur une représentation modale : la transformée par Synchronsqueezing. Le caractère local de l'indice proposé est assuré en cohérence avec la dynamique spectrale de la représentation. L'indice de complexité développé est validé sur des signaux oscillants multicomposantes simulés afin de s'assurer qu'il traduit bien une variation de complexité indépendamment de l'énergie du signal. Son comportement dynamique est enfin discuté en comparaison de l'approche originale sur un exemple-type susceptible de le mettre en défaut. Bien qu'ayant une tendance à la sur-estimation, le comportement de notre indice de complexité est homogène sur l'ensemble des échelles au contraire de l'approche originale, plus difficile à interpréter. L'objectif à terme est d'étendre son application à l'étude de signaux physiologiques réels tels que les signaux posturaux ou locomoteurs. **Mots-clés.** Synchronsqueezing, Complexité, Wavelet entropy, Entropie spectrale **Abstract.** This study proposes a new

approach of spectral entropy based on a modal representation called Synchronsqueezing transform. This local index takes into account the spectral dynamics of the representation and is validated on simulated multicomponent signals. Its dynamic behavior is finally discussed facing a prime example. Even if it tends to overestimation, its behavior is homogeneous through all the scales contrary to the original approach which is consequently more difficult to interpret. The long-term aim of this work is to extend this method to real physiological signals such as postural or locomotive ones. **Keywords.** Synchronsqueezing, Complexity, Wavelet entropy, Spectral entropy

1 Introduction

Cette étude préliminaire propose un nouvel indice d'entropie développé dans l'optique d'être applicable à des signaux physiologiques résultant de l'activité de différents oscillateurs comme les signaux posturaux ou locomoteurs. En plus d'être cohérente avec ce

modèle oscillant multicomposante, il est attendu de la méthode d'analyse déployée qu'elle soit : (1) adaptative au sens où elle nécessite le moins d'hypothèses *a priori* possibles et un paramétrage a minima, (2) locale pour la prise en compte des non-stationnarités et (3) lisible pour l'identification des composantes mises en jeu. L'ensemble de ces considérations nous ont conduits vers une méthode de représentation dite modale : la transformée par Synchronqueezing (SQT) [1]. La SQT repose sur la réallocation des coefficients issus d'une décomposition en ondelettes en fonction de leur comportement local. Le qualificatif modal fait référence à sa capacité, sous certaines conditions, à décomposer le signal selon des composantes dont la fréquence instantanée peut être déterminée de manière univoque. L'entropie est une mesure de complexité permettant de quantifier le degré d'ordre/de prédictibilité d'un système. Cependant, les approches statistiques proposées pour l'estimer dans un contexte physiologique manquent de robustesse [5]. Notre objectif est donc de développer un indice de complexité à partir d'une représentation modale des signaux physiologiques. Cet indice doit pouvoir rendre compte de la richesse spectrale d'un signal multicomposante ainsi que de changements ou comportements transitoires. Pour cela, nous nous sommes inspirés d'un indice existant appelé Wavelet Entropy (WE) que nous décrivons dans un premier temps. Nous détaillons ensuite les modifications opérées sur : (1) la représentation temps-fréquence (RTF) et (2) la prise en compte de la dynamique spectrale de la SQT. Enfin, une démarche simulée est adoptée pour s'assurer que notre indice réponde aux cahier des charges. Les performances de notre indice sont ensuite discutées à partir d'un exemple-type.

2 Entropie spectrale et systèmes dynamiques

L'hypothèse de Goldberger considérant le corps humain est que le vieillissement ou la pathologie se traduirait par une sorte de perte de réserve spectrale et que la réhabilitation peut "dépendre de l'élargissement des réserves spectrales d'un système, de sa capacité à s'étendre sur de nombreuses fréquences sans s'enfermer dans un régime périodique" [2, 3]. Ainsi, une approche de la complexité d'un système consiste à s'intéresser à la richesse spectrale du processus correspondant. L'outil qui en permet la mesure est appelé "entropie spectrale". La wavelet entropy (WE) proposée par Rosso et coll. est une mesure l'homogénéité de la répartition spectrale d'un signal à partir d'une transformée discrète en ondelettes orthogonales (TDOO) [6]. Le choix d'une base de décomposition orthogonale permet d'assurer l'unicité et l'inversibilité de la décomposition. De plus, l'expression de l'énergie qui en découle est particulièrement simple. Soit s un signal et $C_j(k)$ le coefficients de la TDOO au niveau de résolution $j = 1, \dots, L$ et au temps k . Nous avons :

$$\begin{aligned}
 E_j &= \sum_k |C_j(k)|^2, && \text{l'énergie au niveau de résolution } j, \\
 E_{tot} &= \sum_{j=1}^L \sum_k |C_j(k)|^2 = \sum_{j=1}^L E_j, && \text{l'énergie totale,} \\
 p_j &= \frac{E_j}{E_{tot}}, && \text{l'énergie relative au niveau } j.
 \end{aligned}$$

Les p_j forment alors une distribution de probabilité de l'énergie qui peut être vue comme une densité. L'entropie de cette distribution est donnée par : $WE = - \sum_{j=1}^L p_j \ln p_j$.

3 Développement d'un nouvel indice : la WE_{SQT}

Dans sa version originale, la WE est calculée à partir des coefficients d'une TDOO. L'inconvénient principal de cette représentation est qu'elle effectue un filtrage en sous-bandes dont les limites et la largeur sont fixées par la fréquence d'échantillonnage. En conséquence, la résolution est figée et deux modes contenus dans la même sous-bande ne peuvent pas être distingués (Fig. 1). Dans notre version notée WE_{SQT} , la SQT permet d'accéder à une distribution en énergie de meilleure résolution et plus en accord avec le modèle modal des signaux physiologiques. Nous nous sommes assurés de la conservation de l'énergie, démontrée dans le cas d'une sinusoïde [1], en comparant l'énergie calculée à partir du signal et celle calculée à partir de la SQT.

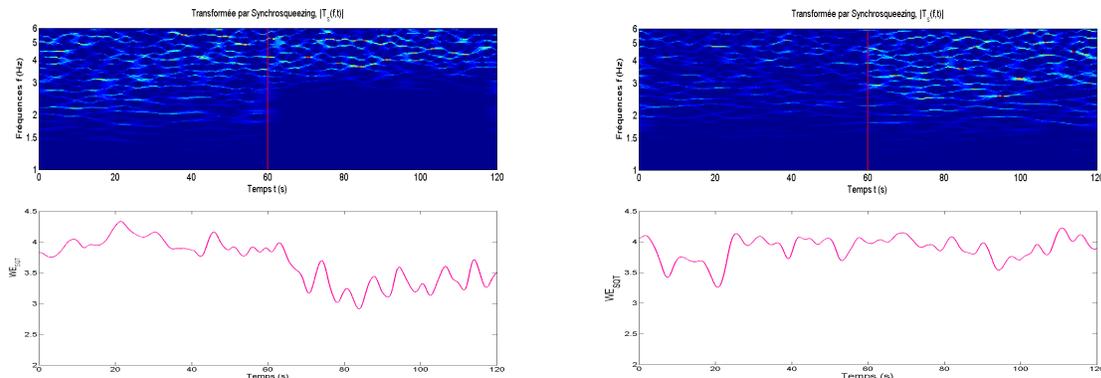
Compte tenu des effets de bords et contrairement à la version originale, la SQT a été effectuée non pas sur chacun des segments, mais sur le signal complet. Un indice local est ensuite obtenu à chaque pas de temps à partir du scalogramme réalloué en cohérence avec la dynamique spectrale de la SQT. En effet, l'information énergétique obtenue est très localisée sur les petites échelles et se diffuse sur les grandes. Pour prendre en compte ce comportement, le cône d'influence de la décomposition [4], est pondérée de manière à privilégier les coefficients les plus proches du centre du cône. La contribution d'un coefficient $W_{b,a}$ à l'énergie au temps b_0 est pondérée par le facteur : $\frac{|b-b_0|}{a} \cdot \mathbf{1}_{Cône_{b_0}}$. Ainsi, nous mettons en correspondance un indice de temps avec l'ensemble des modes locaux susceptibles de lui correspondre et ce, selon une loi liée à la dispersion de la représentation. Le facteur de lissage temporel, lié au taux de recouvrement de deux fenêtres d'indices voisins, dépend du contenu spectral. Le lissage ainsi obtenu est guidé par le comportement local de la décomposition et non pas par une segmentation fixée arbitrairement par l'utilisateur dans le domaine temporel.

4 WE_{SQT} : validation sur signaux simulés

4.1 Influence de l'énergie et de la complexité

Série 1 : complexité variable à énergie constante Pour tester la sensibilité de l'indice aux variations de complexité, 10 bruits blancs ont été générés (120s à 100Hz) et filtrés passe-haut (FIR à 3Hz d'ordre 200) sur la seconde partie de l'enregistrement. L'énergie a ensuite été normalisée sur chacune des parties (Fig. 1a).

Série 2 : énergie variable à complexité constante Pour tester la sensibilité de l'indice aux variations énergétiques, 10 bruits blancs ont été générés (120s à 100Hz), filtrés (FIR passe-bande [1Hz ; 6Hz] d'ordre 200) et amplifiés d'un facteur 2 sur la seconde partie de l'enregistrement (Fig. 1b).



(a) SQT (haut) et WE_{SQT} (bas) d'un signal à complexité variable et énergie constante.

(b) SQT (haut) et WE_{SQT} (bas) d'un signal à complexité constante et énergie variable.

Méthode La WE_{SQT} est calculée à partir de la SQT (Morlet, $f_0 = 6\text{Hz}$, nombre de voies = 64) du signal complet. L'effet d'un changement de condition (PRE *versus* POST) en termes de complexité (resp. d'énergie) est évalué au moyen d'un test de Kruskal-Wallis à mesures répétées sur la variable WE_{SQT} . Les valeurs moyennes d'entropie sur les 20 secondes précédant la perturbation sont comparées à celles obtenues sur les 20 suivantes.

Résultats et Discussion Comme attendu, la WE_{SQT} diminue entre les conditions PRE et POST pour la série 1 ($KW = 13.72$, $p = 0.0002$), alors qu'aucune différence significative n'est observée pour la série 2 ($KW = 3.29$, $p = 0.0696$). Par conséquent, l'indice développé permet bien de rendre compte d'une variation de complexité indépendamment de l'énergie.

4.2 Analyse du comportement dynamique de notre indice

Nous discutons l'apport des modifications opérées à partir d'un signal constitué de la somme de deux composantes situées, dans un premier temps, sur deux échelles différentes et, dans un second temps, sur la même échelle (Fig. 1) : (1) un signal harmonique de fréquence 4Hz et (2) un chirp dont la fréquence évolue linéairement entre 1Hz et 7Hz. Le signal a été échantillonné à 100Hz sur 120 secondes. Du fait qu'elle balaie continûment toute la gamme spectrale, cette configuration est la plus à même de mettre en défaut les différents types de représentation. Les deux composantes en présence s'intersectent à $t_0 = 60\text{s}$. De part et d'autre de t_0 , la complexité théorique est donc constante de valeur 0.7 et s'annule en t_0 .

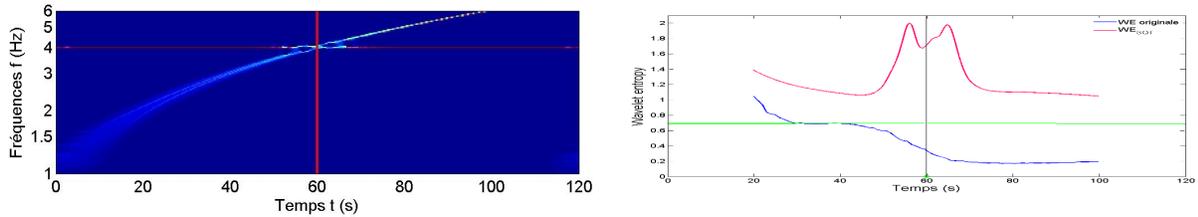


Figure 1 – SQT d’un signal simulé obtenu par l’ajout d’un sinus à 4Hz et d’un chirp dont la fréquence évolue linéairement de 1 à 7Hz (gauche). Comparaison des approches de WE originale et modifiée (droite). Seules les 80s centrales ont été comparées pour limiter les effets bord de chacune des représentations. La WE a été calculée sur des fenêtres de 20 secondes avec 95% de recouvrement (en bleu). La WE théorique est nulle à 60s et constante de valeur 0.7 ailleurs (en vert).

Observations La WE a un comportement moyen constant sur les deux portions de la simulation. Avant 40s, elle coïncide avec la complexité théorique (0.7) et diminue progressivement pour atteindre un second plateau à la valeur 0.2. La WE_{SQT} présente d’importantes variations entre 50s et 70s. Elle diminue à t_0 . Son comportement moyen est constant de valeur 1.1 de part et d’autre de la zone de perturbation.

Discussion Avant 40s, la WE détecte parfaitement la présence de deux composantes. La frontière entre les niveaux d’échelles 4 et 5 de la TDOO se situe à 3.125Hz. Au-delà de cette fréquence, les deux composantes du signal se situent sur le même niveau d’échelle et sont confondues par la TDOO. Le temps $t = 40s$ coïncide avec le passage du chirp sur le même niveau d’échelle que le sinus et avec la durée à partir de laquelle la WE diminue et converge vers une faible valeur d’entropie. Cette sous-estimation de la complexité ainsi que l’impossibilité de détecter sa diminution due à l’intersection des deux composantes est une conséquence de la faible résolution de la décomposition. Avant 50s et après 70s, la WE_{SQT} rend compte d’une complexité constante supérieure à la valeur théorique. Comme attendu, elle présente une diminution au temps t_0 . Les zones de transition entre ces différents états coïncident avec l’intersection puis l’éloignement des composantes en présence. Une mauvaise séparation due à une proximité trop importante peut être envisagée. Les biais de surestimation globale et de transition peuvent s’expliquer par la création de composantes artificielles au cours de la réallocation. La durée de ces périodes de transition dépend de l’échelle de l’évènement. En revanche, en dehors des zones de transition, le comportement de l’indice suit les variations de la complexité et ce, indépendamment de l’échelle.

5 Discussion et perspectives

L’indice de complexité développé dans le cadre de ce travail est basé sur la décomposition modale issue de la SQT. Les difficultés liées à l’extraction de modes d’une part, et le découpage de la gamme spectrale du modèle postural en bandes relatives aux modalités

sensorielles d'autre part, nous ont conduit à reconsidérer notre façon d'aborder la complexité du signal. L'approche spectrale adoptée (entropie en échelles) a l'avantage de ne pas nécessiter la reconstruction de modes. De fait, les phénomènes transitoires peuvent être pris en considération. Par ailleurs, cette approche permet une lecture directe en fréquences et donc, facilite la mise en regard des modes et du modèle spectral. Enfin, l'obtention d'un indice évoluant dans le temps est rendu possible la prise en compte de la dynamique spectrale de la SQT. À une échelle donnée, la résolution temporelle est fixée par la largeur du cône. La validation de notre indice à détecter des changements de complexité a été faite à partir de signaux simulés. L'analyse d'un exemple-type constitué de la somme d'un chirp et d'un sinus a permis de discuter ses avantages et ses limites. En comparaison de la méthode originale WE, notre indice a notamment une meilleure sensibilité aux ruptures, avec une dynamique relative au niveau d'échelle de l'évènement. En dépit d'une tendance à surestimer le niveau de complexité, il présente l'avantage d'avoir un comportement homogène sur l'ensemble des échelles. Le biais de surestimation peut être imputé à la SQT qui est susceptible de créer, au cours de la réallocation, des contributions artificielles de faible énergie. Dans la poursuite de ces travaux, un protocole adapté sera mis en place en vue d'une application sur des signaux posturaux réels.

Références

- [1] I. Daubechies, J. Lu, and H.-T. Wu. Synchrosqueezed wavelet transforms : An empirical mode decomposition-like tool. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 30(2) :243 – 261, 2011.
- [2] J. Gleick. *Chaos theory : Making a new science*. Penguin, 1987.
- [3] A. L. Goldberger. Non-linear dynamics for clinicians : chaos theory, fractals, and complexity at the bedside. *Lancet*, 347(9011) :1312–1314, May 1996.
- [4] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Access Online via Elsevier, 1999.
- [5] C.-K. Peng, M. Costa, and A. L. Goldberger. Adaptive data analysis of complex fluctuations in physiologic time series. *Adv Adapt Data Anal*, 1(1) :61–70, Jan 2009.
- [6] O. A. Rosso, S. Blanco, J. Yordanova, V. Kolev, A. Figliola, M. Schürmann, and E. Basar. Wavelet entropy : a new tool for analysis of short duration brain electrical signals. *J Neurosci Methods*, 105(1) :65–75, Jan 2001.