Superquantiles de Bregman, méthode d'estimation et applications

Tatiana Labopin-Richard [1] & Fabrice Gamboa [1] & Aurélien Garivier [1] & Iooss Bertrand [2]

[1] *Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse, France, tatiana.labopin@math.univ-toulouse.fr, fabrice.gamboa@math.univ-toulouse.fr, aurelien.garivier@math.univ-toulouse.fr*
[2] *EDF R & D, Site de Chatou 6, quai Watier BP 49 78401 Chatou, biooss@yahoo.fr*

Résumé. En finance, les mesures de risque vérifiant certaines propriétés importantes comme l'homogénéité ou la sous-additivité sont dites cohérentes. Ainsi, comme le quantile n'est pas sous-additif, il est souvent préférable de travailler avec le superquantile (espérance de la de X sachant que X est supérieur à son quantile) qui définit bien une mesure de risque cohérente.

Lors de cette présentation, nous étudierons une nouvelle mesure de risque inspirée du superquantile mais construite en utilisant la moyenne de Bregman plutôt que l'espérance usuelle. Nous parlerons alors du superquantile de Bregman.

Nous verrons que sous certaines hypothèses raisonnables sur la fonction convexe γ permettant de définir cette moyenne, le superquantile de Bregman est une mesure de risque cohérente. Enfin, nous proposerons un estimateur Monte Carlo pour cette quantité qui est fortement constistant et asymptotiquement normal dès lors que nous pouvons contrôler la vitesse de divergence en 1 de la fonction quantile et de ses dérivées.

Nous terminerons la présentation par quelques exemples et applications fournies par EDF.

Mots-clés. Superquantile (conditional value-at-risk), moyenne de Bregman, mesure de risque cohérente, comportement asymptotique

Abstract. In finance, measures of risk wich satisfy some interesting properties (homogeneity, sub-additivity, ...) are said coherent. Thus, since the quantile is not sub-additive, we had better work with the superquantile or conditional value-at-risk (expectation of X given that X is superior to his quantile) which is a coherent measure of risk.

During this talk we will study a new measure of risk inspired by the superquantile but built from de Bregman mean instead of the usual expectation. We name this measure the Bregman superquantile. We will also see that under some reasonable assumptions on the convex function of the Bregman mean, the Bregman superquantile is a coherent measure of risk. Then we will introduce a Monte Carlo estimator for this quantity, which is strongly consistent and normally asymptotic when we are able to control the speed of divergence of the quantile function and its derivative around 1. We will conclude with some exemples and applications from EDF.

Keywords. Superquantile (conditional value-at-risk), Bregman mean, coherent measure of risk, asymptotic behavior

1 Introduction

Lors de cette présentation, nous allons étudier certaines propriétés de l'extention de Bregman du superquantile définit dans [7] (voir aussi [6] et [5]). Nous présenterons d'abord ce superquantile de Bregman. Nous montrerons ensuite que sous certaines conditions il définit une mesure de risque cohérente au sens de Rockafellar dans [4], puis nous proposerons un estimateur pour cette quantité et étudierons son comportement asymptotique.

2 Superquantile de Bregman

2.1 Divergence et moyenne de Bregman

Soit γ une fonction strictement convexe définit sur R et à valeurs dans $\overline{R}$. Classiquement, nous posons

$$\mathrm{dom}\gamma := \{x \in : \gamma(x) < +\infty\}.$$

Pour soucis de simplicité, nous supposons que domγ est non vide et que γ est différentiable sur domγ. La divergence de Bregman d_γ associée à γ (voir [3]) est définie sur dom$\gamma \times$domγ par

$$d_\gamma(x, x') := \gamma(x) - \gamma(x') - \gamma'(x')(x - x'), \quad (x, x' \in \mathrm{dom}\gamma).$$

La divergence de Bregman n'est pas une distance puisqu'elle n'est pas symétrique. Cependant, comme elle est positive et s'annule si et seulement si ses deux arguments sont égaux, elle quantifie une proximité dans domγ.

Soit maintenant μ une mesure de probabilité dont le support est inclus dans domγ. Tout comme dans [2], nous définissons d'abord la moyenne de Bregman comme l'unique point b dans le support de μ qui vérifie :

$$\int d_\gamma(b, x)\mu(dx) = \min_{m \in \mathrm{dom}\gamma} \int d_\gamma(m, x)\mu(dx).$$

*(1)

En fait, on remplace la minimisation L^2 dans la définition de l'espérance mathématique par une minimisation de la divergence de Bregman. Un argument standard de dérivation conduit à

$$b = \gamma'^{-1}\left[\int \gamma'(x)\mu(dx)\right].$$

Exemples fondamentaux

Lorsque nous prenons la fonction de Bregman classique $\gamma(x) = x^2$, nous retrouvons le superquantile usuel. Avec la fonction de Bregman géométrique $\gamma(x) = x\ln(x) - x + 1$, nous retrouvons la moyenne géométrique et enfin, avec la fonction de Bregman harmonique $\gamma(x) = -\ln(x) + x - 1$, nous retrouvons la moyenne harmonique.

2.2 Superquantile de Bregman

Comme le superquantile n'est pas sous-additif (propriété interessante en finance, comme expliqué dans [1]), Rockafellar introduit dans [4] une nouvelle quantité, appelée superquantile, qui vérifie cette propriété. Le superquantile est définit de la manière suivante :

$$Q_\alpha^X = E(X|X \geq q_\alpha^X).$$

où q_α désigne le quantile d'ordre α. Dans cette présentation, nous étudions l'extension de Bregman du superquantile en posant :

$$q_\alpha^b = \gamma'^{-1}\Big(E(\gamma'(X)|X \geq q_\alpha^X)\Big) = \gamma'^{-1}\Big(E(\gamma'(X)|X \geq F_X^{-1}(\alpha))\Big).$$

Cela signifie que q_α^b vérifie $(*)$ en prenant pour μ la distribution de X conditionellement à $X \geq q_\alpha^X$.

3 Superquantile de Bregman et mesure de risque cohérente

3.1 Définition d'une mesure de risque cohérente

La sous-additivité n'est pas la seule propriété intéressante pour une mesure de risque (par exemple pour des applications en finance). Rockafellar introduit dans [1] la notion de mesure de risque cohérente. De telles mesures vérifient les 5 propriétés suivantes :

i) Si $X = C$ est la variable aléatoire constante égale á C, alors $\mathcal{R}(C) = C$.

ii) $\forall\lambda > 0$, $\mathcal{R}(\lambda X) = \lambda\mathcal{R}(X)$.

iii) $\mathcal{R}(X + X') \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(X')$.

iv) Si $X \leq X'$ p.s alors $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(X')$.

v) Si $\mathcal{R}(X) \leq 0$ et $||X_h - X||_{L^2} \mapsto 0$ alors $\mathcal{R}(X_h) \leq 0$.

3.2 Le superquantile de Bregman est-il une mesure de risque cohérente ?

La proposition suivante donne des conditions sous lesquelles le superquantile de Bregman est une mesure de risque cohérente.

Proposition

i) Les axiomes 1 et 2 sont toujours vrais.

ii) Pour les fonctions de Bregman classiques, géométriques et harmoniques, l'axiome 3 est vrai. Cependant, il est faux dans le cas général.

iii) Si γ' est concave et sous-additive, alors les axiomes 4 et 5 sont vrais. La sous-additivité est fausse dans le cas général.

Exemples importants

Ainsi, les trois fonction de Bregman définies plus haut, ayant des dérivées concaves mais sous-additives seulement sur $[1, +\infty[$ sont des mesures de risques cohérentes, dés lors que nous considérons une loi vérifiant :

$$\min\left(q_\alpha^X(\alpha), q_\alpha^{X'}(\alpha), q_\alpha^Z(\alpha)\right) > 1.$$

4 Estimation du superquantile de Bregman

4.1 Estimateur de Monte Carlo

Supposons que nous disposons d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d distribuée comme X. Si l'on souhaite estimer q_α^b, on peut utiliser l'estimateur empirique suivant :

$$\hat{q_\mu^\alpha} = \gamma'^{-1}\left[\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=\lfloor n\alpha\rfloor+1}^{n}\gamma'(X_{(i)})\right)\right]$$

oú $(X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)})$ est l'échantillon ré-ordonné construit à partir de $(X_1, \ldots, X_n)$.

4.2 Comportement asymptotique

4.2.1 Lien avec le superquantile classique

Remarquons d'abord que

$$E\left(\gamma'(X)\mathbf{1}_{X>F_X^{-1}(\alpha)}\right) = E\left(Z\mathbf{1}_{Z>F_Z^{-1}(\alpha)}\right)$$

avec $Z = \gamma'(X)$. Ainsi, nous allons étudier d'abord le comportement asymptotique de l'estimateur du superquantile classique.

Proposition : Consistance
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F de classe $\mathcal{C}^2$. On note f sa densité et on suppose que f ne s'annule pas. Ainsi, la fonction quantile F^{-1} existe et est $\mathcal{C}^2$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon indépendant distribué comme X. Pour $0 < \alpha < 1$, on suppose que :

H1) Le superquantile est fini.

H2) La fonction quantile est dérivable et sa fonction dérivée (parfois appelée la fonction isoperimetrique) vérifie la propriété suivante au voisinage de 1 :

$$l(t) := \frac{1}{f(F^{-1}(t))} = o\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)$$

H3) l est croissante au voisinage de 1.

Alors l'estimateur $\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n}\sum_{i=\lfloor n\alpha \rfloor}^{n} X_{(i)}$ est fortement consistant.

Proposition : Normalité asymptotique
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F de classe $\mathcal{C}^2$. On note f sa densité et on suppose que f ne s'annule pas. Ainsi, la fonction quantile F^{-1} existe et est $\mathcal{C}^2$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon indépendant distribué comme X. Pour $0 < \alpha < 1$, on suppose que :

H1) Le superquantile est fini.

H2) La dérivée seconde de la fonction quantile (notée L) vérifies : au voisinage de 1, il existe $m_L < \frac{5}{2}$ tel que :

$$L(t) = O\left(\frac{1}{(1-t)^{m_L}}\right)$$

H3) L est croissante au voisinage de 1.

Alors :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{i=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{n} X_{(i)} - Q_\alpha\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha}\right)$$

oú

$$\sigma^2 := \int_\alpha^1 \int_\alpha^1 \frac{(\min(x,y) - xy)}{f(F^{-1}(x))f(F^{-1}(y))}$$

4.2.2 Retour au superquantile de Bregman

Dans la mesure où le superquantile de Bregman de X se trouve être le superquantile classique de $Z := \gamma'(X)$ et que $F_Z^{-1} = \gamma' \circ F_X^{-1}$, on peut facilement transposer les hypothèses de nos propriétés. Nous verrons alors quelques exemples et cas applicatifs fournis par EDF.

Bibliographie

[1] P. Artzner and F. Delbaen and J.M Eber and D. Heath (1998), Coherent Measures of Risk.
[2] A. Ben-Tal and A. Charnes and M. Teboulle (1989), Entropic means, Journal of Mathematical Analysis and Applications, volume 139, Numéro 2.
[3] L. M. Bregman (1967), The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, USSR computational mathematics and mathematical physics, volume 7, numéro 3.
[4] R.T. Rockafellar (2007), Coherent approches to risk in optimization under uncertainty, Tutorials in operation research Informs.
[5] R.T. Rockafellar and J.O. Royset (2013), Random variables, monotone relations, and convex analysis, Mathematical Programming B, forthcoming.
[6] R.T. Rockafellar and J.O. Royset and S.I. Miranda (2013), Superquantile Regression with Applications to Buffered Reliability, Uncertainty Quantification, and Conditional Value-at-Risk, Preprint, available at http://www. math. washington. edurtr/papers. html.
[7] R.T. Rockafellar and S.Uryasev (2000), Optimization of conditional value-at-risk, Journal of risk, volume 2.