

# OPTIMISATION DE L'AGRÉGATION D'UN PORTEFEUILLE DE CONTRAT D'ASSURANCE VIE

Pierre-Olivier Goffard <sup>1</sup>

<sup>1</sup> AXA France, Université de Aix-Marseille. pierreolivier.goffard@axa.fr

**Résumé.** Une méthode d'agrégation aux portefeuilles de contrat d'assurance vie est présentée. Il s'agit d'une procédure en deux étapes. La première étape consiste à utiliser des méthodes statistiques de classification afin de créer des groupes homogènes de contrats. La seconde étape permet la définition d'un contrat représentatif ou "moyen" pour chacune des classes. Ce travail s'inscrit dans le cadre des préparatifs de la mise en application de Solvabilité II. Cette nouvelle directive européenne oblige notamment une évaluation des provisions qui tient compte de l'aléa qui pèse sur l'activité d'une compagnie d'assurance. Cette évaluation implique des temps de calcul importants qui motivent la mise au point de méthodes pour réduire les temps de calcul sous réserve de ne pas fausser significativement l'évaluation des quantités d'intérêt. Une illustration, basée sur la valorisation d'un portefeuille de contrat d'assurance vie de type épargne individuelle, est proposée.

**Mots-clés.** Méthodes de classification, Provision Best Estimate, Solvabilité II, Modèle de projection des cash-flows.

**Abstract.** An aggregation method adapted to insurance policies portfolios is presented. The method is a two step procedure. The first step consists in using statistical partitioning methods in order to put insurance policies into homogeneous groups. The second step is the construction of an "average" policy to represent each aforementioned groups. This work is part of the preparations for the establishment of Solvency II. This new european directive states that liabilities evaluation should be done by taking into accounts the underlying hazard specific to an insurance company business. The computations induce a great increasing of the CPU time needed in a policy-by-policy approach. This last fact motivates the work presented here. An illustration based on a real life insurance portfolio is proposed.

**Keywords.** Partitionning methods, Best Estimate Liabilities, Solvency II, Cash-flows projection methods.

## Description de la communication

### Définition des provisions Best Estimate

Les provisions Best Estimate ou *Best Estimate Liabilities* - BEL représente une vision réaliste des réserves financières qu'un assureur doit constituer pour faire face à ses en-

gagements futurs. Il s'agit de la moyenne des flux financiers sortants en valeur actuelle pondérés par leur probabilité d'occurrence sur une période définie par un horizon de projection (par exemple 30 ans). Les modèles de projection des cash-flows ont pour objet d'effectuer une valorisation qui tient compte des évolutions démographiques, légales, médicales, technologiques, sociales et économiques potentielles.

## Application à la valorisation un contrat d'assurance vie de type épargne

Dans le cadre d'un contrat d'assurance vie de type épargne, l'assuré effectue à la souscription un premier versement. Ce capital initial est investi sur différents supports d'investissement dont le rendement est fonction des marchés financiers. L'assureur doit être en mesure, à tout instant, de verser une somme égale à la valeur l'épargne à l'assuré. L'épargne est capitalisée en fonction des rendements des supports d'investissement et est égale, pour un certain instant  $t$ , à

$$SV(t) = SV(0) \times \exp\left(\int_0^t r_a(s) ds\right). \quad (1)$$

Où  $r_a$  est un taux de rendement instantané,  $SV(0)$  correspond à la valeur de l'épargne à la date de calcul ou d'inventaire. Il s'agit de la valeur du Cash-flow qui pourrait éventuellement sortir à l'instant  $t$ . Le calcul des provisions Best Estimate implique une actualisation des flux sortants. La valeur actuelle de l'épargne en  $t$  est égale à

$$\begin{aligned} PSV(t) &= SV(t) \times \exp\left(-\int_0^t r_\delta(s) ds\right) \\ &= SV(0) \times \exp\left(\int_0^t (r_a(s) - r_\delta(s)) ds\right), \end{aligned}$$

où  $r_\delta$  est un taux d'actualisation instantané. Les deux taux mentionnés ici sont modélisés via des processus stochastiques. Dans le cadre d'un contrat épargne individuelle, trois événements peuvent engendrer un flux sortant,

- L'arrivée à échéance du contrat, certains contrats ont un terme fixé à la souscription, d'autres sont renouvelés annuellement par tacite reconduction,
- Le décès de l'assuré,
- Le rachat du contrat, qui correspond à une décision de la part de l'assuré de solder son compte.

Le rachat et le décès de l'assuré sont des événements probabilisables. Soit  $\tau$  une variable aléatoire de densité  $f_\tau$  par rapport à la mesure de Lebesgue, égale à l'instant de sortie anticipée (avant l'arrivée à échéance du contrat). La densité de probabilité de  $\tau$  dépend

des caractéristiques de chaque contrat, l'âge et le genre influencent la probabilité de décès et l'ancienneté (ou la date de souscription) influence la probabilité de rachat. Dans le cadre d'un modèle de projection des Cash-flow, un horizon est généralement spécifié. De plus certains contrats admettent un terme. L'arrivée à échéance du contrat et la fin de la projection sont associées à des instants déterministes et se confondent. Ils peuvent donc être notés  $T$  sans ambiguïté. L'instant de sortie est donc égale à une variable aléatoire définie par  $\tau \wedge T = \min(\tau, T)$ . La loi de probabilité qui régit cette variable aléatoire est une mesure de probabilité mixte

$$dP_{\tau \wedge T}(t) = f_{\tau}(t)d\lambda(t) + \overline{F}_{\tau}(t)\delta_T(t), \quad (2)$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, T]$ ,  $\delta_T$  est la mesure de Dirac en  $T$  et  $\overline{F}_{\tau}$  est la fonction de survie de la variable aléatoire  $\tau$ . Les *Best Estimate Liabilities* - BEL (provision Best Estimate) sont définies, à l'instant  $t = 0$ , par

$$BEL(0, T) = E^{P_{\tau \wedge T} \otimes Q^f}(PSV(t)(\tau \wedge T)), \quad (3)$$

où  $Q^f$  est une mesure de probabilité qui régit l'évolution des taux d'actualisation et de capitalisation définis précédemment. Cette définition du BEL se retrouve dans l'ouvrage de Gerber [5] ou dans des travaux plus récents tels que [1]. Soit  $\mathbf{F}$  un scénario financier, le BEL associé à ce scénario pour un contrat est égale à

$$\begin{aligned} BEL^F(0, T) &= E^{P_{\tau \wedge T}}(PSV(\tau \wedge T | \mathbf{F})) \\ &= \int_0^{+\infty} SV(0) \times \exp\left(\int_0^t (r_a(s) - r_{\delta}(s))ds\right) dP_{\tau \wedge T}(t) \\ &= \int_0^T SV(0) \times \exp\left(\int_0^t (r_a(s) - r_{\delta}(s))ds\right) f_{\tau}(t)dt \\ &\quad + \overline{F}_{\tau}(T) \times SV(0) \times \exp\left(\int_0^T (r_a(s) - r_{\delta}(s))ds\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Dans la pratique, les calculs s'effectuent en discrétisant le temps. l'expression du BEL devient alors

$$BEL^F(0, T) \approx \left[ \sum_{t=0}^{T-1} p(t, t+1) \prod_{k=0}^t \frac{1 + r_a(k, k+1)}{1 + r_{\delta}(k, k+1)} + p(T) \prod_{k=0}^{T-1} \frac{1 + r_a(k, k+1)}{1 + r_{\delta}(k, k+1)} \right] SV(0) \quad (5)$$

où

- $p(t, t+1)$  est la probabilité de sortir exactement entre  $t$  et  $t+1$ . Le calcul de ces probabilités nécessite l'évaluation des taux de rachat et de décès d'une période à l'autre via l'emploi de méthodes classiques en actuariat vie, voir [8] par exemple.  $p(T)$  est la probabilité que l'assuré reste dans le portefeuille jusqu'à la fin de la dernière année de projection,

- $r_a(t, t + 1)$  et  $r_\delta(t, t + 1)$  sont des taux forward respectivement de capitalisation et d'actualisation entre  $t$  et  $t + 1$ .

L'objectif est de mettre au point des procédures permettant la réduction des temps de calculs tout en minimisant l'erreur sur l'évaluation des provisions Best Estimate.

## Description de l'agrégation d'un portefeuille

L'emploi de méthodes de regroupement est autorisé par la réglementation sous réserve qu'il permette une réduction conséquente des temps de calcul et qu'il n'implique pas une sous-estimation des risques sous-jacents voir [2]. La première étape du processus d'agrégation est la classification des contrats, la deuxième consiste à construire un représentant pour chaque classe appelé *Model Point*. La somme des provisions initiales est attribuée à ce contrat représentatif d'obtenir en sortie un portefeuille agrégé comparable au portefeuille initial. La méthode de regroupement se fonde sur la remarque suivante:

Soit  $n$  contrats admettant une même densité  $f_\tau$  pour décrire leur comportement au cours de la projection. Le Model Point admet naturellement cette densité  $f_\tau$ , et on vérifie aisément que

$$BEL_{MP} = \sum_i^n BEL_{C_i}. \quad (6)$$

Le BEL calculé sur le seul contrat représentatif égale la somme des BEL des  $n$  contrats considérés. Le BEL pour ces  $n$  contrats a donc été obtenu exactement en réalisant le calcul sur un seul contrat. L'égalité des densités équivaut dans la vision discrète à l'égalité des probabilités de sortie sur chaque période au cours de la projection. Dans le cadre des contrats d'assurance vie de type épargne, les contrats ayant les mêmes probabilités de sortie sont simplement associés à des assurés de même caractéristiques biométriques et ayant souscrit lors de la même année. Le regroupement des contrats ayant les mêmes probabilités de sortie engendre la création d'un portefeuille agrégé qui est toujours trop volumineux. L'idée est d'utiliser les méthodes statistiques de classification afin de regrouper les contrats ayant des probabilités de sortie proches au cours de la projection. Le problème se rapproche de la classification des données fonctionnelles. En adoptant une vision discrète du temps chaque contrat est caractérisé par les probabilités de sortie associées à chaque période. Ces probabilités de sortie forment des trajectoires qui permettent une visualisation graphique du portefeuille de contrats.

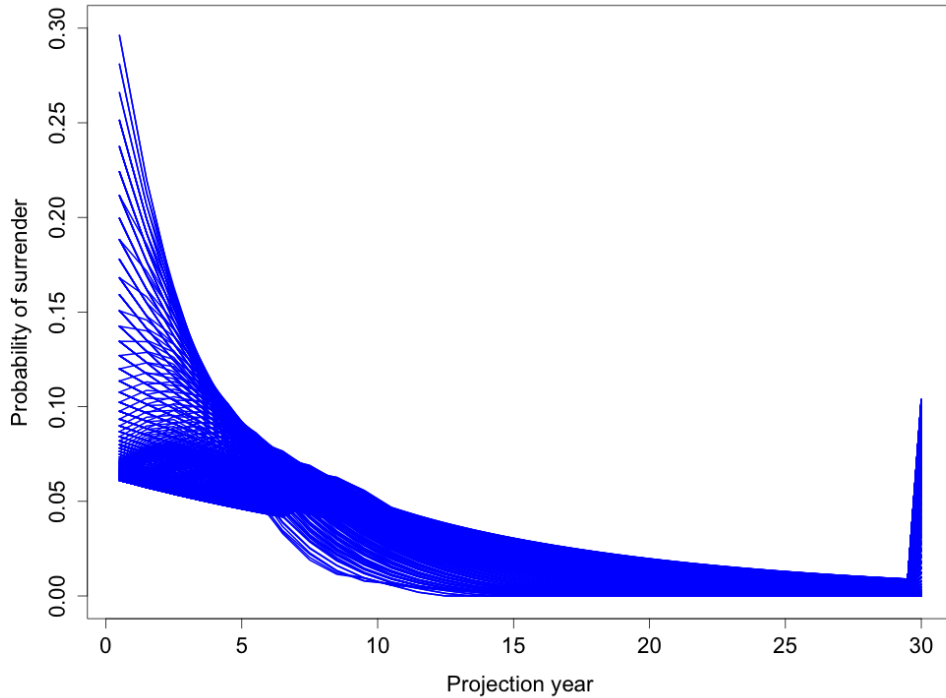


Figure 1: Trajectoires de probabilités de sortie pour un portefeuille de contrats d'assurance vie

Le problème est très proches de la classification des données répétées auquel sont confrontés les biostatisticiens. Pour classer ces données, une méthode de classification non paramétrique a été choisie avec la réalisation d'une Classification Ascendante Hierarchique - CAH consolidée par un algorithme des K plus proches voisins - KMEANS. On se réfère aux ouvrages [3] et [6] pour une description des techniques évoquées et aux travaux [4] et [7] pour une application à des données répétées.

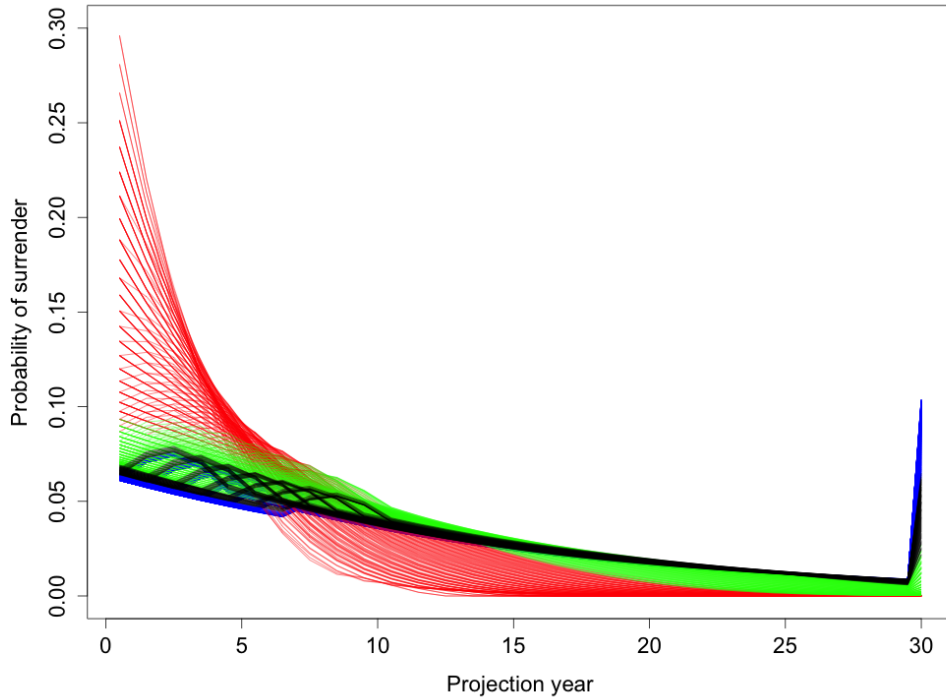


Figure 2: Trajectoires des probabilités de sortie classifiées pour un portefeuille de contrats d'assurance vie

Une fois les groupes créés, le contrat représentatif se voit attribué les probabilités de sortie du barycentre de la classes qu'il représente. Un système de pondération des contrats en fonction de leur provision mathématique initiale est mis en place. La valeur des provisions Best Estimate est très liée à la provision initiale des contrats. Une mauvaise représentation des contrats associés à une forte provision implique mécaniquement une erreur, en termes de montant, importante sur le BEL. Le choix du nombre de classes est un aspect sur lequel la marche de manoeuvre est réduite car le nombre de contrat au sein du portefeuille agrégé est imposé par les ressources informatiques disponibles et la complexité du modèle de projection des cash-flows. Il s'agit donc de trouver le regroupement optimal pour un nombre fixé de classes.

## Conclusion

Ce travail constitue l'application concrète d'une méthode innovante dans l'industrie. La méthode est déjà passé en production au sein d'AXA France. Le portefeuille agrégé contient 4000 contrats avec en input un portefeuille contenant plusieurs millions de contrats.

L'écart relatif de valorisation au globale a été chiffré à 0.05%. Ces résultats de validation s'accompagnent d'une documentation permettant la justification théorique des résultats obtenus, ce qui est très important pour la communication avec les autorités réglementaires. Outre le reporting réglementaire, la réduction des temps de calcul permet de multiplier les analyses de sensibilité aux hypothèses, d'envisager plus de scénarios et par conséquent de prendre de meilleurs décisions en ce qui concerne la gestion des risques. Les idées développées peuvent servir de base à la mise au point de méthode d'agrégation dépassant le cadre très restreint des portefeuilles de contrats de type épargne individuelles.

## Bibliographie

- [1] F. Bonnin, F. Planchet et M. Julliard (2012), *Best estimate calculations of saving contracts by closed formulas: Application to the ORSA*, Les cahiers de recherches de l'ISFA.
- [2] EIOPA (2010), *Technical Specifications for QIS V*, European commission.
- [3] B.S. Everitt, S. Landau et M. Leese (1995), *Cluster Analysis*, A Hodder Arnold Publication.
- [4] C. Genolini et B. Falissard (2010), "*KML: K-means for longitudinal data*", Computational statistics.
- [5] H.U. Gerber (1990), *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag.
- [6] J. Hartigan (1975), *Clustering Algorithm*, Wiley.
- [7] B. Hejblum, J. Skinner and R. Thiebaut (2012), *Application of gene set analysis of Time-Course gene expression in a HIV vaccine trial*, 33rd annual conference of international society for clinical biostatistics.
- [8] P. Petauton, D. Kessler et J.L. Bellando (2002), *Théorie et pratique de l'assurance vie*, Dunod.