Estimation globale de la régularité d'un processus Gaussien

Delphine Blanke [1] & Céline Vial [2]

[1] *Avignon Université, LMA EA2151, 33 rue Louis Pasteur, F-84000 Avignon, France,* *delphine.blanke@univ-avignon.fr.*

[2] *Université de Lyon, CNRS UMR 5208, Polytech Lyon-Université de Lyon 1, Institut Camille Jordan, 43 blvd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France,* *celine.vial@univ-lyon1.fr.*

Résumé. Nous considérons un processus réel Gaussien X de régularité globale (r_0, β_0), $r_0 \in \mathbb{N}$ et $\beta_0 \in]0,1[$, où $X^{(r_0)}$ (la dérivée en moyenne quadratique de X si $r_0 \geq 1$) est supposée localement stationnaire de paramètre β_0. En considérant des variations quadratiques basées sur les différences divisées de X, nous proposons un estimateur pour (r_0, β_0) basé sur des observations non nécessairement équidistantes de X. Nous donnons les propriétés théoriques de nos estimateurs ainsi que des études numériques variées pour des données simulées ou réelles.

Mots-clés. Inférence pour des processus Gaussiens, processus localement stationnaire, différences divisées, variations quadratiques.

Abstract. We consider a real Gaussian process X having a global unknown smoothness (r_0, β_0), $r_0 \in \mathbb{N}_0$ and $\beta_0 \in]0,1[$, with $X^{(r_0)}$ (the mean-square derivative of X if $r_0 \geq 1$) supposed to be locally stationary with index β_0. From the behavior of quadratic variations built on divided differences of X, we derive an estimator of (r_0, β_0) based on - not necessarily equally spaced - observations of X. We study the theoretical behaviour of our estimators and give various numerical studies for simulated and real data.

Keywords. Inference for Gaussian processes, locally stationary process, divided differences, quadratic variations.

Résumé

Dans beaucoup de domaines, l'estimation de la régularité d'un processus représente toujours et encore un problème important. La connaissance de cette régularité permet tout d'abord de donner des estimateurs précis pour l'approximation et l'intégration de processus échantillonnés. De plus, pour un processus réel Gaussien stationnaire dont la covariance est donnée par $\mathbb{K}(s,t) = \mathbb{K}(|t-s|, 0)$ et telle que $\mathbb{K}(t,0) = \mathbb{K}(0,0) - A\,|t|^{2\beta_0} + o(|t|^{2\beta_0})$ quand $|t| \to 0$, le paramètre β_0, $0 < \beta_0 < 1$, est lié à la dimension fractale des trajectoires. Cette relation, étudiée en particulier dans les travaux de Adler (1981), Taylor et Taylor (1991), a donné lieu à une importante littérature autour de la seule estimation de β_0. On peut se référer à l'article de synthèse de Gneiting *et al.* (2012) qui permet d'avoir une vue d'ensemble des travaux existant sur l'estimation de la dimension fractale, pour des processus réels et spatiaux, et des données supposées équidistantes.

Notre but est d'estimer la régularité globale (r_0, β_0) d'un processus Gaussien X, supposé (si $r_0 \geq 1$) r_0-fois dérivable en moyenne quadratique, et tel que $X^{(r_0)}$, $r_0 \in \mathbb{N}$, est localement stationnaire avec la régularité β_0, $0 < \beta_0 < 1$. Les paramètres (r_0, β_0) étant supposés inconnus, notre apport se porte donc sur les points suivants :

- X est observé à des instants non nécessairement équidistants : nous considérons que les temps d'échantillonnage sont des quantiles d'une densité donnée,
- X n'est supposé ni stationnaire, ni avec des accroissements stationnaires : nous utilisons une hypothèse de stationnarité locale introduite par Berman (1974),
- l'ordre de différentiabilité de X, r_0, n'est pas connu et doit être estimé,
- pour $r_0 \geq 1$, le coefficient de régularité β_0 est relatif à la dérivée non observée, $X^{(r_0)}$.

Notre méthodologie est basée sur un estimateur de r_0, noté $\widehat{r_0}$, construit sur l'étude des variations quadratiques des différences divisées de X, généralisant donc l'estimateur étudié dans Blanke et Vial (2011) pour le cas équidistant. Dans une deuxième étape, nous estimons le paramètre β_0, avec un estimateur $\widehat{\beta_0}$ pouvant être vu comme une simplification de l'estimateur étudié par Kent et Wood (1997) dans le cas $r_0 = 0$. Notons que pour des processus à accroissements stationnaires et dans le cadre équidistant, Istas et Lang (1997) ont également proposé un estimateur de la quantité $H = 2(r_0 + \beta_0)$ par une approche globale de régression linéaire. De notre point de vue, notre procédure en deux étapes semble être plus simple à mettre en œuvre et performante. Nous obtenons tout d'abord une borne exponentielle pour $\mathbb{P}(\widehat{r_0} \neq r_0)$, puis les vitesses de convergence presque sûre pour $\widehat{\beta_0}$. On remarque alors que ces vitesses sont comparables à celles du cas $r_0 = 0$: ainsi, l'estimation préliminaire de r_0 n'affecte pas celle de β_0, même si $X^{(r_0)}$ n'est pas directement observé. Dans un deuxième temps, nous donnons des résultats théoriques sur les applications à l'interpolation et à l'intégration de processus observés à des instants discrétisés. Nous illustrons ces résultats par plusieurs études numériques et appliquons également les résultats obtenus à des données réelles, en se basant sur deux jeux de données, considérés dans Laslett (1994) et Brown *et al.* (2001). Enfin, s'il reste du temps, nous donnerons les premières extensions obtenues pour le cas des processus spatiaux.

Bibliographie

R. J. Adler : *The geometry of random fields.* Wiley, New-York, 1981.

S.M. Berman : Sojourns and extremes of Gaussian processes. *Ann. Probab.*, 2:999–1026 (Corrections (1980), 8, 999 and (1984) 12, 281), 1974.

D. Blanke et C. Vial : Estimating the order of mean-square derivatives with quadratic variations. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 14(1):85–99, 2011.

D. Blanke et C. Vial : Global smoothness estimation of a Gaussian process from regular sequence designs. *Preprint arXiv*, 1211.2763v2(January):28 pages, submitted, 2014. http ://arxiv.org/pdf/1211.2763v2.

P. J. Brown, T. Fearn et M. Vannucci : Bayesian wavelet regression on curves with application to a spectroscopic calibration problem. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 96(454): 398–408, 2001.

Tilmann Gneiting, Hana Ševčíková et Donald B. Percival : Estimators of fractal dimension : assessing the roughness of time series and spatial data. *Statist. Sci.*, 27(2):247–277, 2012. ISSN 0883-4237.

J. Istas et G. Lang : Quadratic variations and estimation of the local hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist.*, 33(4):407–436, 1997.

J. T. Kent et A. T. Wood : Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process by using increments. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 59(3):679–699, 1997.

G. M. Laslett : Kriging and splines : an empirical comparison of their predictive performance in some applications. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 89(426):391–409, 1994. With comments and a rejoinder by the author.

C. C. Taylor et S. J. Taylor : Estimating the dimension of a fractal. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 53(2):353–364, 1991.