MESURES D'ASYMÉTRIE EN ÉCONOMIE ET EN FINANCE

Hélène Honoré [1]

[1] *CNRS Eurofidai UPS 3390.*
Eurofidai, Domaine Universitaire - UPMF, 150 rue de la Chimie - BP 47
38040 Grenoble Cedex 9, France.
helene.honore@eurofidai.org

Résumé. L'asymétrie joue un rôle croissant en économie et en finance en particulier. Or, le skewness est essentiellement mesuré, dans ces travaux, par le troisième moment central standardisé, même si d'autres mesures existent. Nous proposons donc d'intégrer ces mesures alternatives. L'objectif de notre étude est d'examiner l'effet que peut avoir le choix d'une mesure spécifique du skewness sur l'interprétation d'un phénomène économique.

Mots-clés. Skewness, relation d'ordre, fonction d'influence.

Abstract. The skewness takes an increasing place in the economy and in the finance theory in particular. However, in these papers, skewness is predominately measured by the third standardized moment, even if others measures exist. We propose then to integrate these alternative measures. The aim of our study is to examine the effect that the choice of a specific skewness measure may have on the interpretation of economic phenomena.

Keywords. Skewness, ordering, influence function.

Il est fondamental de bien comprendre le concept de skewness, cette question intervenant dans de nombreuses problématiques économiques et financières. L'approche habituelle pour définir le concept du skewness consiste en la présentation des différents indicateurs existant pour le qualifier. Or, pour Van Zwet (1964), Oja (1981) et MacGillivray (1986), plutôt que de commencer par définir les mesures et ensuite seulement de s'interroger sur ce qu'elles représentent et ce que signifie le concept du skewness, il est plus pertinent d'effectuer la démarche inverse : Van Zwet propose alors d'ordonner les distributions par rapport au skewness, cette structure du skewness permettant dans un deuxième temps de construire différentes mesures préservant les ordres définis, d'identifier leurs rôles et d'en fournir une hiérarchie. La définition statistique du skewness reposant sur la relation d'ordre proposée par Van Zwet (1964) correspond à la relation d'ordre la plus forte : l'ordre de skewness de Van Zwet est indépendant de toute mesure de localisation et d'échelle. Van Zwet définit la relation d'ordre $\leq_C$ qui permet de comparer l'asymétrie des distributions des variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F et G et de densités f et g ayant comme support un intervalle. Par définition, G est au moins aussi asymétrique à droite que F si $G^{-1}(F(x))$ est convexe sur $I_F = \{x \text{ tels que } 0 < F(x) < 1\}$, ce que l'on note $F \leq_C G$. Pour une convexité stricte, on définit l'ordre $<_C$.

La relation d'ordre du skewness de Van Zwet (1964) permet de construire une structure sous-jacente assurant la cohérence de toutes les formalisations alternatives proposées pour définir l'asymétrie. Ainsi, toute mesure du skewness, notée γ, doit respecter les quatre propriétés suivantes énoncées par Van Zwet (1964) et reprises par Oja (1981) :

Propriété P1 : la mesure γ doit être invariante aux changements d'échelle et d'origine, autrement dit, avec $a > 0$, $-\infty < b < \infty$, $\gamma(X) = \gamma(aX + b)$.

Propriété P2 : pour une distribution symétrique X, $\gamma(X) = 0$.

Propriété P3 : $\gamma(-X) = -\gamma(X)$.

Propriété P4 : soient F et G les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y. Si $F \leq_C G$, alors $\gamma(X) \leq \gamma(Y)$, où $\leq_C$ est la relation d'ordre sur les distributions définie par rapport au skewness.

La relation d'ordre de Van Zwet étant assez restrictive, d'autres relations d'ordre ont été construites (MacGillivray, 1986 ; Arnold et Groeneveld, 1992) en affaiblissant celle de Van Zwet (1964), c'est-à-dire en levant certaines hypothèses. L'affaiblissement de l'ordre de Van Zwet permet de couvrir des classes de distributions plus larges. Par ailleurs, la littérature statistique a proposé une méthodologie alternative pour construire des ordres du skewness : en se basant sur les fonctions du skewness. Cette approche tire son origine d'une définition particulière du skewness. En effet, Benjamini et Krieger (1996) décomposent le quantile $F^{-1}(p)$ comme la somme de la médiane (une mesure de la localisation), d'une mesure d'étendue (définie par $SP_F(p) \equiv \frac{1}{2}\{F^{-1}(p) - F^{-1}(1-p)\}$) et d'un indicateur d'asymétrie (défini par $SK_F(p) \equiv \frac{1}{2}\{F^{-1}(p) + F^{-1}(1-p) - 2m\}$). Ils ont alors répertorié quatre définitions d'asymétrie - à droite en l'occurrence - apparues dans la littérature, présentées par ordre croissant du degré d'asymétrie considéré : tout d'abord, si $SK_F(p) \geq 0$ pour $p > 0,5$ (reprenant la définition de Doksum (1975)), puis si $SK_F(p)$ est non-décroissante pour $p > 0,5$, ensuite si $SK_F(p)/SP_F(p)$ est non-décroissante pour $p > 0,5$ et enfin si $(\frac{d}{dp}SK_F(p))/(\frac{d}{dp}SP_F(p))$ est non-décroissante pour $p > 0,5$. Ces différentes définitions de l'asymétrie à droite permettent non seulement de proposer des indicateurs statistiques du skewness, mais aussi de construire des ordres de comparaison des distributions en termes d'asymétrie.

De très nombreux indicateurs ont été proposés pour mesurer le skewness, abordant chacun ce concept de manière différente, même si toute mesure de skewness satisfait les propriétés précédentes et se définit dans le cadre des relations d'ordre énoncées antérieurement. L'indicateur du skewness le plus connu et le plus utilisé est le troisième moment central standardisé, introduit par Edgeworth (1904) et Charlier (1905), défini par :

$$\gamma_1 \equiv \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$$

où X est une variable aléatoire continue de fonction de répartition F et de densité f, d'espérance μ et de variance σ^2. L'inconvénient principal de γ_1 est d'être particulièrement sensible aux valeurs extrêmes. Afin de pallier cette limite (Hotelling et Solomons, 1932), et dans le même esprit que les mesures robustes bien connues de la localisation et de l'échelle (la médiane est l'équivalent de cette mesure pour la moyenne et l'écart interquartile pour l'écart type), Hinkley (1975) propose une définition alternative de l'asymétrie reposant sur les quantiles : pour $0 < \alpha < 0,5$

$$SK_{Q_\alpha} = \frac{(F^{-1}(1-\alpha) - m) - (m - F^{-1}(\alpha))}{(F^{-1}(1-\alpha) - m) + (m - F^{-1}(\alpha))}$$

Cette mesure correspond donc à la différence de la distance entre le α-ième quantile supérieur et la médiane et la distance entre la médiane et le α-ième quantile inférieur, divisée par la somme de ces deux distances. Cependant, l'inconvénient de la formalisation SK_{Q_α} est qu'elle dépend du paramètre α et qu'il peut être difficile de déterminer la valeur de α qu'il faudrait choisir. C'est pourquoi, Groeneveld et Meeden (1984) intègrent cette expression par rapport à α :

$$SK_{\text{GM}} = \frac{\int_0^{0,5} \{F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha) - 2\ F^{-1}(0,5)\} d\alpha}{\int_0^{0,5} \{F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha)\} d\alpha} = \frac{\mu - F^{-1}(0,5)}{E|X - F^{-1}(0,5)|}$$

Ainsi, SK_{GM} correspond à la définition $b' \equiv (\mu - m)/\sigma$ proposée par Yule (1912), dans laquelle la mesure d'échelle, σ, a été remplacée par $E|X - m|$. La mesure SK_{GM} peut également s'écrire :

$$SK_{\text{GM}} = \frac{\{E(X|X \geq m) - m\} - \{m - E(X|X \leq m)\}}{\{E(X|X \geq m) - m\} + \{m - E(X|X \leq m)\}}$$

Le numérateur de cette nouvelle mesure du skewness correspond à la différence des distances d'une part, entre la moyenne de la partie supérieure et m et d'autre part, entre m et la moyenne de la partie inférieure. La dénominateur est la somme de ces deux distances.

Il est nécessaire de qualifier précisément les caractéristiques de la distribution prises en compte par chacune de ces mesures. L'analyse de la fonction d'influence de chacune des mesures de skewness étudiées permet de déterminer l'effet sur l'indicateur d'une légère déviation à partir de la symétrie et ainsi d'appréhender clairement la manière dont l'asymétrie est définie spécifiquement par chaque mesure. La fonction d'influence développée initialement par Hampel (1974) et reprise par Ruppert (1987) indique non seulement le sens de l'évolution d'une mesure du skewness face à de faibles déviations d'une distribution (symétrique ou non), mais également l'ampleur de l'effet de ces mouvements de masse de probabilité sur cet indicateur. La fonction d'influence, notée IF, pour la contamination asymétrique de la distribution F pour la mesure T est définie par :

$$\text{IF}(x; F, T) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_x) - T(F)}{\varepsilon}$$

où F_ε est la distribution contaminée telle que $F_\varepsilon = (1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_x$.

En résumé, les mesures du skewness présentées précédemment subissent le même type d'effet : en considérant, par exemple, une distribution unimodale symétrique en 0, les fonctions d'influence pour les mesures γ_1, SK_{Q_α} et SK_{GM} sont négatives sur des intervalles de la forme $(-\infty, a)$ et $(0, a)$ et positives sur $(-a, 0)$ et $(a, +\infty)$. La contamination de la queue gauche (resp. droite) de la distribution diminue (resp. augmente) le skewness, alors que la contamination de l'épaule gauche (resp. droite) de la distribution augmente (resp. diminue) le skewness. Les différences entre ces mesures du skewness proviennent, d'une part, de la valeur a et, d'autre part, de l'amplitude de l'impact de ces déviations. Ainsi, même si les indicateurs étudiés précédemment rendent compte différemment du skewness et subissent des influences hétérogènes, leurs fonctions d'influence respectives disposent de points communs, au moins dans le comportement général de la fonction. Un skewness positif provient, par exemple, de faibles déviations à partir d'une distribution symétrique dans la queue droite ou au centre à gauche de la médiane, alors qu'un skewness négatif tire son origine de la contamination de la distribution symétrique dans la queue gauche ou au centre à droite de la médiane. Cependant, aucun de ces indicateurs du skewness ne rend compte de l'asymétrie sans limite : les indicateurs γ_1 et SK_{GM} subissent l'influence des valeurs extrêmes. De leur côté, les mesures basées sur les quantiles ont l'inconvénient d'être des fonctions étagées : le passage d'une région centrée à une région excentrée s'effectue brutalement. De plus, il faut noter que les variations d'asymétrie de la distribution ne peuvent être étudiées de manière homogène : en effet, un mouvement particulier de la distribution ne prend pas le même sens selon la situation initiale.

En conclusion, l'objectif de cette étude est de considérer simultanément un ensemble de mesures du skewness qui fournissent des informations complémentaires sur l'asymétrie de la distribution. Les fonctions d'influence permettent d'analyser la manière dont chaque mesure du skewness est affectée par un mouvement de distribution et, ainsi, d'interpréter correctement les variations de ces indicateurs dans le cadre d'études économiques.

Bibliographie

[1] Arnold, B. et Groeneveld, R. (1992), Skewness and Kurtosis Orderings : An Introduction, *Lecture Notes-Monograph Series* 22, Stochastic Inequalities, 17-24.

[2] Benjamini, Y. et Krieger, A.M. (1996), Concepts and Measures for Skewness with Data- Analytic Implications, *The Canadian Journal of Statistics*, 24-1, 131-140.

[3] Charlier, C.V. (1905), Uber das Fehlergesetz, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 2-8, 1-9.

[4] Doksum, K.A. (1975), Measures of Location and Asymmetry, *Scandinavian Journal of Statistics*, 2, 11-22.

[5] Edgeworth, F.Y. (1904), The Law of Error, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 20, 36-65 et 113-141.

[6] Groeneveld, R. et Meeden, G. (1984), Measuring Skewness and Kurtosis, *The Statis-*

tician, 33, 391-399.
[7] Hampel, F.R. (1974), The Influence Curve and its Role in Robust Estimation, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 383-393.
[8] Hinkley, D.V. (1975), On Power Transformations to Symmetry, *Biometrika*, 62, 101-111.
[9] MacGillivray, H.L. (1986), Skewness and Asymmetry : Measures and Orderings, *The Annals of Statistics*, 14-3, 994-1011.
[10] Oja, H. (1981), On Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions, *Scandinavian Journal of Statistics*, 8, 154-168.
[11] Ruppert, D. (1987), What is Kurtosis ? An Influence Function Approach, *The American Statistician*, 41-1, 1-5.
[12] Van Zwet, W.R. (1964), *Convex Transformations of Random Variables*, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
[13] Yule, G.U. (1912), *An Introduction to the Theory of Statistics*, 1ère éd., Charles Griffin, Londres.