Transformation Probabilité-Possibilité et raisonnement statistique: Application à la Finance

Alfred Mbairadjim Moussa

LAMETA - Université Montpellier I, UFR d'Economie Avenue Raymond DUGRAND - Site de Richter C.S. 79606 34960 MONTPELLIER CEDEX 2 France, Courriel: mbairadjim@lameta.univ-montp1.fr, moussa_alf@yahoo.fr

Résumé.
La théorie des possibilités introduite par Zadeh (1978), est une des théories les plus couramment utilisées pour le traitement de l'information incomplète et de données imprécises. Cependant, la difficulté qu'on éprouve à inférer empiriquement une distribution de possibilité est une des principales limites à son application pour le raisonnement statistique. En adoptant la méthode de transformation probabilité-possibilité de Dubois et al. (2004), cet article propose un estimateur du moment possibiliste f-pondéré d'ordre supérieur avant de discuter ses propriétés asymptotiques. Enfin, les domaines d'application possibles en finance quantitative sont énumérés.

Mots-clés. Mesure de Probabilité, Mesure de Possibilité, Moments possibiliste f-pondérés, Finance quantitative.

Abstract. Possibility theory, as introduced by Zadeh (1978), is one of the most frequently used theories in the assessment of incomplete information and imprecise or inaccurate data. However, the difficulty met in the empirical inference of a possibility distribution is one of the major drawbacks to its application for statistical reasoning. In adopting the probability-possibility conversion method of Dubois et al. (2004), this paper proposes an estimator of the possibilistic f-weighted higher-order moment before discussing its asymptotic properties. Finally, possible areas of application in quantitative finance are listed.

Keywords. Probabibility measure, Possibility measure, f-weighted possibilistic moments, Quantitative finance ...

1 Introduction

La théorie des possibilités introduite par Zadeh (1978), est une des théories les plus couramment utilisées pour le traitement de l'information incomplète et de données imprécises. Elle est similaire à la théorie des probabilités mais diffère de cette dernière par l'utilisation d'un couple de mesures au lieu d'une seule. De plus, ces mesures sont non-additives et non-auto duales. L'élément fondamental de la théorie de possibilité est la distribution de possibilités qui coïncide formellement avec la fonction d'appartenance d'un ensemble flou comme défini par Zadeh (1965). En présence de source d'information faible, de données hétérogènes, incertaines et imprécises, la théorie des possibilités s'est révélée être plus utile pour la modélisation que la théorie des probabilités. Dubois (2006) justifie et met en exergue les bénéfices qu'apporte la théorie des possibilités pour le raisonnement statistique lorsque les données à modéliser proviennent de l'environnement décrit précédemment. Cependant, l'application de la théorie de possibilité pour le raisonnement statistique se heurte à un grand obstacle, celui de l'inférence empirique d'une distribution de possibilité à partir d'un échantillon observé. Ces difficultés sont en partie causées par l'absence d'une méthode comparable à celle du maximum de vraisemblance en probabilité. La solution intuitive résultant des algorithmes et opérations logiques, préconisée par Ross (1995, pp.179-180) peut être toujours valable. Cependant elle nécessite une hypothèse sur la forme de la fonction d'appartenance. Parmi les solutions non-paramétriques, plus récentes, proposées dans la littérature, celle de Masson et Donoeux (2006) est l'une des plus citées car elle ne nécessite pas la connaissance des probabilités. Elle généralise la transformation probabilité-possibilité de Dubois et Prade produisant la distribution de possibilité la plus spécifique qui domine une distribution de probabilité donnée. Toutefois, nous adoptons la transformation probabilité et probabilité de Dubois et Prade car elle permet d'établir un lien avec la pratique probabiliste classique et par suite, donne lieu à un certains nombre d'interprétations et de discussions avec des éléments de la théorie statistique. Dans cet article, nous appliquons la méthode de transformation probabilité-possibilité pour inférer une distribution de possibilité (Section 3). A partir de cette distribution, on rediscute le concept de moment de possibiliste f-pondérés d'ordre supérieur de Saeidifar et Pasha (2009) à la section 4. Les conditions d'existence sont analysées et un estimateur est introduit. Avant cela, la section (2) de l'article est consacrée à une brève introduction aux éléments de base nécessaire à la lecture de l'article. Les domaines d'applications possibles sont énumérés à la conclusion à la section 5.

2 Préliminaires

Soit Θ l'univers [1] et $\mathcal{P}(\Theta)$ l'ensemble des parties de Θ. Les éléments de $\mathcal{P}(\Theta)$ sont appelés événements.

Définition 1 *La fonction ensemble* Π *est appelée mesure de possibilité si elle satisfait les axiomes suivantes:*

1. $\Pi\{\Theta\} = 1$;
2. $\Pi\{\emptyset\} = 0$;
3. $0 \leq \Pi\{A\} \leq 1$ *pour tout* $A \in \mathcal{P}(\Theta)$;
4. $\Pi\{\bigcup_i A_i\} = \sup_i \Pi\{A_i\}$ *pour toute famille* $\{A_i\}$ *de* $\mathcal{P}(\Theta)$.

Le triplet $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), \Pi)$ est appelée l'espace de possibilité.

L'élément fondamental de la théorie de possibilités est la distribution de possibilité qui coïncide formellement avec la fonction d'appartenance d'un ensemble flou.

Soit ξ une variable floue définie par la fonction d'appartenance $\mu_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ et A un élément de $\mathcal{P}(\Theta)$. Le degré de possibilité de l'événement flou $\{\xi \in A\}$ est donnée par

$$\Pi\{\xi \in A\} = \sup_{t \in A} \mu_\xi(t) \tag{1}$$

De nombreux auteurs ont proposé durant ces deux dernières décennies des operateurs d'espérance pour résumer l'information modélisée par une distribution de possibilité. La première tentative est due a Dubois et Prade (1987). Inspirés par cette approche originale, des auteurs tels que Chanas et Nowakowski (1988), Heilpern (1992), Delgado et al. (1998) et Carlsson et Fuller (2001) ont proposé des améliorations aboutissant finalement à la généralisation de Fuller et Majlender (2003). Pour un ensemble flou A définissant une distribution de possibilité et une fonction de pondération $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, non-négative, monotone décroissante et vérifiant la condition de normalisation[2] , ces deux auteurs ont introduit l'operateur de moyenne possibiliste f-pondéré comme suit

$$\mathbb{E}^f_\Pi(\xi) = \int_0^1 \frac{\xi^i_\alpha + \xi^s_\alpha}{2} f(\alpha) d\alpha \tag{3}$$

[1] On définit ici par univers l'ensemble de tous les résultats possibles qui peuvent être obtenus au cours d'une expérience dont l'issu n'est pas connu d'avance.

[2] C'est-à-dire

$$\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = 1. \tag{2}$$

où ξ_α^i et ξ_α^s sont respectivement les bornes inferieure et supérieure de l'α-coupe de ξ.

Dans la définition 3, en introduisant fonctions de pondération variées, différents niveaux d'importance (dépendant de chaque cas) peuvent être assignés aux α-coupes de la distribution de possibilité. Notons par ailleurs que Saeidifar et Pasha (2009) ont généralisés les moyennes et variances possibilistes de Fuller et Majlender (2003) aux moments standards, centrés et partiels d'ordres supérieurs à 2.

3 Transformation probabilité-Possibilités

Initiée par Dubois et Prade (1982) avant d'être affinée par Dubois et al. (2004), la transformation (ou conversion) probabilité-possibilité a aussi été abordée par de nombreux auteurs tels que Delgado et Moral (1987) ou Klir (1990), parmi tant d'autres. La transformation probabilité-possibilité est très utile lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes qui nécessitent d'analyser des données imprécises ou provenant d'une source non-totalement fiable. Dubois et al (2004) précise que la représentation possibiliste est plus faibles pour deux raisons : elle traite explicitement l'imprécision et utilise des mesures basées sur une structure ordinale et non-additive. Parmi les méthodes de conversion probabilité-possibilité précédemment citées, on adopte celle de Dubois et Prade qu'on décrit brièvement comme suit :

Soit la variable aléatoire réelle $\mathcal{X}$ continue admettant une fonction de répartition F et x^* une estimation ponctuelle de $\mathcal{X}$ pouvant être le mode, la moyenne ou la médiane. Dubois et al. (2004, p.281) définit la transformée probabilité-possibilité de $\mathcal{X}$ comme la variable floue dont la distribution de possibilité correspondant au nombre flou dont les α-coupes sont les intervalles de confiance probabilistes notés $I^*_{1-\alpha}$ de niveau de confiance $1-\alpha$ construit autour de x^*.

Pour la suite, nous choisissons x^* comme la médiane de $\mathcal{X}$. Notons ξ l'ensemble flou issu de la transformation probabilité-possibilité de $\mathcal{X}$ sous cette nouvelle hypothèse. La définition de Dubois et al. (2004, p.281) implique que les α-coupes de ξ sont

$$\xi_\alpha = \left[F^{-1}\left(\alpha/2\right), F^{-1}\left(1-\alpha/2\right)\right], \tag{4}$$

où la fonction inverse de la cumulative notée F^{-1} n'est autre que la fonction quantile de $\mathcal{X}$. Par suite, la fonction d'appartenance de ξ est

$$\mu_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 2F\left(x\right) & \text{si} \;\; x \leq x^*, \\ 2\left(1-F\left(x\right)\right) & \text{si} \;\; x^* \leq x. \end{cases} \tag{5}$$

Notons enfin que toute densité de probabilité p, Dubois et al. (2004, Théorème 3.1) prouve que la distribution de possibilité π^* de la définition de Dubois et al. (2004, p.281), obéit à l'exigence du principe de cohérence entre probabilité et possibilité se traduisant par l'inégalité suivante

$$P(A) \leq \Pi(A) \ \ \forall A \subseteq \Omega, \tag{6}$$

où P et Π sont respectivement une mesure de probabilité et de possibilité sur l'espace Ω considérées. On dit alors que P domine Π.

Supposons maintenant qu'on dispose d'un échantillon de longueur n de $\mathcal{X}$ noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$ supposé être observé selon l'ordre $\{x_{1:n} \leq \ldots \leq x_{n:n}\}$. Pour $\alpha \in [0,1]$, on peut estimer empiriquement les α-coupes par

$$\hat{\xi}_\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i:n} \mathbb{1}_{\left(\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]}(\alpha), \sum_{i=1}^{n} x_{i:n} \mathbb{1}_{\left(\frac{2(n-i)}{n}, \ \frac{2(n-i+1)}{n}\right]}(\alpha) \right] \tag{7}$$

De manière alternative, la fonction d'appartenance empirique est estimée comme suit :

$$\hat{\mu}_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}} & \text{si} \ \ x \leq x_{n_0:n}, \\ 2\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \leq x\}}\right) & \text{si} \ \ x_{n_0:n} < x. \end{cases} \tag{8}$$

où n_0 est la partie entière de $n/2$.

4 Moments possibilistes et propriétés statistiques

Dans cette sous-section, nous partons de la transformation probabilité-possibilité présentée à la section précédente pour introduire des moments permettant de caractériser et de décrire les distributions de possibilités obtenues. La sous-section commence par la définition de ces moments avant de proposer des estimateurs pour ces moments.

Considérons une fonction de pondération $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ne vérifiant que la propriété de non-négativité et de normalisation et notons $Q = F^{-1}$ la fonction quantile. Nous relâchons l'hypothèse de non-décroissance de la fonction de pondération. On se donne ainsi la latitude de donner des degrés d'appartenance avec des sens de croissance propre à l'analyse à effectuer.

Définition 2 *Soit p un entier naturel et τ un nombre réel. Le moment f-pondéré d'ordre p autour de τ est défini par*

$$\mathbb{E}_\Pi^f\left[(\xi - \tau)^p\right] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(Q(\alpha/2) - \tau\right)^k + \left(Q(1 - \alpha/2) - \tau\right)^k \right] f(\alpha) d\alpha. \tag{9}$$

Les conditions d'existence de ces moments sont établies dans le théorème suivant

Théorème 1 *Si f est bornée et $\mathbb{E}\left[|(\mathcal{X}-\tau)^p|\right] < \infty$ alors $\mathbb{E}_\Pi^f\left[(\xi-\tau)^p\right]$ existe et est fini.*

Pour avoir une meilleure interprétation des liens existant entre ces deux types de moments, on propose une réécriture de l'expression (9) comme suit

$$\mathbb{E}_\Pi^f\left[(\xi-\tau)^p\right] = \int_0^{1/2} g_1(\alpha)\,(Q_\alpha-\tau)^p\,d\alpha + \int_{1/2}^1 g_2(\alpha)\,(Q_\alpha-\tau)^p\,d\alpha. \tag{10}$$

avec

$$g_1(\alpha) = f(2\alpha),\;\; g_2(\alpha) = f\left(2(1-\alpha)\right); \tag{11}$$

Ainsi $\mathbb{E}_\Pi^f\left[(\xi-\tau)^p\right]$ peut s'interpréter comme le moment probabiliste d'ordre p pondérée de $\mathcal{X}-\tau$ avec la fonction de pondération ϕ suivante

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} g_1(\alpha) = f(2\alpha) & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 1/2, \\ g_2(\alpha) = f\left(2(1-\alpha)\right) & \text{si } 1/2 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{12}$$

D'autres pondérations plus générales peuvent être envisagées en choisissant une fonction f non-monotone.

Sur la base de l'échantillon mentionné précédemment, on a l'assertion suivante:

Théorème 2 *Un estimateur convergent et asymptotiquement sans biais du moment possibiliste f-ponderé $\mathbb{E}_\Pi^f\left[(\xi-\tau)^p\right]$ est donné par*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{E}}_\Pi^f\left[(\xi-\tau)^p\right] &= \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}(x_{i:n}-\tau)^p\, f(\frac{2i}{n}) \\ &+ \frac{1}{n-n_0}\sum_{i=n_0+1}^{n}(x_{i:n}-\tau)^p\, f(2-\frac{2i}{n}). \end{aligned}$$

où n_0 est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

5 Conclusions

Cet article a discuté de la théorie des possibilités pour le raisonnement statistique lorsque l'information à analyser contient de l'imprécision. En partant de la conversion probabilité-possibilité de Dubois et al. (2004), un estimateur est proposé pour les moments possibilistes f-pondérés d'ordre superieur. Ces résultats peuvent être appliqués dans plusieurs domaines de la finance quantitative. On peut citer la mesure de performance des fonds spéculatifs à cause du manque de transparence des activités des gérants mais aussi la gestion de portefeuille lorsque les données utilisées sont entachées de bruit microstructurel.

Bibliographie

[1] Carlsson C., Fullèr R., 2001. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 122, 315-326.
[2] Chanas S., Nowakowski M., 1988. Single value simulation of fuzzy variable. Fuzzy Sets and Systems, 25, 43-57.
[3] Delgado M., Vila M.A., Woxman W, 1998. On a canonical representation of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 93, 125-135.
[4] Dubois D., 2006. Possibility theory and statistical reasoning. Computational Statistics & Data Analysis, 51, 47-69.
[5] Dubois D., Foulloy, L., Mauris, G., Prade, H., 2004. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. Reliable Computing, 10, 273-297.
[6] Dubois D., Prade H. 1987. The mean value of a fuzzy number. Fuzzy Sets and Systems, 24, 279-300.
[7] Dubois D., Prade, H., 1980. Theory and application, fuzzy sets and systems. New York: Academic Publishers.
[8] Fullèr R., Majlender P., 2003. On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 136 , 363-374.
[9] Heilpern S., 1992. The expected value of a fuzzy number. Fuzzy Sets and Systems, 47 (1) , 81-86.
[10] Klir G.J., 1990. A principle of uncertainty and information invariance, Int. J. of General Systems, 17, 249-275.
[11] Masson M.-H., Denoeux T, 2006. Inferring a possibility distribution from empirical data. Fuzzy Sets and Systems, 157(3), 319-340.
[12] Ross T. J., 2004. Fuzzy logic with engineering applications, Second Edition. John Wiley Sons.
[13] Saeidifar A., Pasha E., 2009. The possibilistic moments of fuzzy numbers and their applications. Journal of Computational and Applied Mathematics, 223, 1028-1042
[14] Zadeh L. A.,1965. Fuzzy sets. Information and control 8, 338-353.
[15] Zadeh L. A., 1978. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems,1, 3-28.