Sur une classe de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires généralisés

Abdelhakim Aknouche [1]

[1] *Faculté des Mathématiques, Université des sciences et de Technologie Houari Boumediene, Alger, Algérie,* aknouche_ab@yahoo.com

Résumé. Nous proposons une classe de modèles autorégressifs à coefficients aléatoires généralisés ($GRCA$), dans laquelle le coefficient autorgressif est la somme d'une constante, d'un terme du processus d'innovation et d'un membre d'un processus indépendant identiquement distribué qui plus est indépendant du processus d'innovation. Ainsi, le coefficient aléatoire et l'innovation sont corrélés comme dans tout $GRCA$, mais de telle sorte à permettre au modèle une plus grande flexibilité dans la représentation de la volatilité tout en étant assez simple à mettre en oeuvre. Nous étudions la structure probabiliste du modèle et son estimation par la méthode des moindres carrés pondérés en quatre étapes dont nous établissons consistance et normalité asymptotique indépendamment de l'hypothèse de stationnarité. Des applications sur des données réelles montrent alors la pertinence du modèle proposé que nous comparons aux modèles $GARCH$ et RCA standards.

Mots-clés. Modèle AR à coefficients aléatoires généralisé, modèle de volatilité, structure probabiliste, méthode des moindres carrés pondérés en quatre étapes, consistance et normalité asymptotique, test de stabilité.

Abstract. We propose a class of generalized random coefficient autoregressions ($GRCA$) in which the autoregressive coefficient is a sum of a constant, an innovation term and a member of an independent and identically distributed process that is independent of the innovation process. Thus, the random coefficient and the innovation term are correlated as with any $GRCA$, but so as to allow for a model with a great flexibility in representing volatility while being simple to implement. We study the probabilistic structure of the model and a four-stage weighted least squares estimation for which we establish consistency and asymptotic normality without assuming stationarity. Applications on real data show the relevance of the proposed model we compare with the $GARCH$ and standard random coefficient autoregressive models.

Keywords. Generalized random coefficient autoregression, volatility model, probabilistic structure, weighted least squares, consistency and asymptotic normality, stability testing.

1 Introduction

Les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (RCA) ont connu cette dernière décennie une résurgence d'intérêt en raison de leur aptitude à représenter à la fois les valeurs d'un phénomène et leur variabilité (ex. Aknouche, 2013). Un RCA typique est une autorégression dans laquelle le coefficient autorégressif est un terme d'un processus aléatoire qui est supposé indépendant ou du moins non corrélé avec le processus d'innovation. Hwang et Basawa (1998) ont proposé un RCA généralisé ($GRCA$) dans lequel le coefficient aléatoire est plutôt corrélé avec l'innovation, permettant ainsi une plus grande flexibilité dans la représentation de la volatilité. Cependant, la spécification très générale de la corrélation ne rend pas facile la mise en oeuvre statistique du modèle (ex. Zhao et Wang, 2012). Dans ce travail nous proposons une classe particulière des modèles $GRCA$, plus simple, mais tout aussi flexible. Le modèle consiste en une autorégression dont le coefficient autorégressif est la somme d'une constante, d'un terme du processus d'innovation et d'un membre d'un processus indépendant identiquement distribué (iid) qui de plus est indépendant du processus d'innovation. Cette spécification est introduite pour rendre la variance conditionnelle du processus observé linéaire par rapport aux paramètres. Cela permet donc d'utiliser une méthode des moindres carrés pondérée en quatre étapes, de forme explicite et d'une efficacité asymptotique relative égalant celle de la méthode du quasi-maximum de vraisemblance et ce dans les deux cas de stationnarité et de non stationnarité. Nous montrons la pertinence du modèle proposé sur des séries de rendements financiers, comparant le avec des modèles de volatilité de référence, tels les modèles $GARCH$ et les modèles RCA.

2 Présentation et structure du modèle $GRCA$

Considérons un processus autorégressif à coefficients aléatoires généralisé ($GRCA\,(1)$), $\{y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$, donné par l'équation suivante :

$$y_t = (\phi + \xi_t + \delta\varepsilon_t)y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{N}^*, \tag{2.1}$$

où y_0 est une constante, $\phi \in \mathbb{R}$, $\delta \in \{-1, 1\}$ est une constante connue et :

A1 $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$ et $\{\xi_t, t \in \mathbb{N}\}$ sont des processus iid, indépendants, définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec $E(\xi_1) = 0$, $E(\xi_1^2) = \rho^2$, $E(\varepsilon_1) = 0$ et $E(\varepsilon_1^2) = \sigma^2$.

Le modèle (2.1) est un $RCA(1)$ dont le coefficient aléatoire $\xi_t + \delta\varepsilon_t$ est corrélé avec le terme d'innovation ε_t, avec coefficient de corrélation $\tau = Corr\,(\xi_t + \delta\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \frac{\delta\sigma}{\sqrt{\rho^2+\sigma^2}}$, où $\delta \in \{-1, 1\}$ est introduit pour permettre une corrélation τ positive pour $\delta = 1$ et négative pour $\delta = -1$. Deux cas particuliers du modèle (2.1) sont à remarquer. Lorsque $\rho^2 = 0$, le $GRCA\,(1)$ se réduit au modèle Bilinéaire Markovien (Tong, 1981) pour lequel la corrélation τ est pleine. D'autre part, pour $\sigma^2 = 0$, la corrélation τ est nulle et on retrouve le modèle AR à innovation bilinéaire. Entre ces deux extrêmes, le modèle $GRCA(1)$ est à la fois de moyenne conditionnelle et de variance conditionnelle. En effet, si $\mathcal{F}_t$ désigne la σ-algèbre générée par $\{y_0, (\varepsilon_s, \xi_s,), s \leq t\}$ alors $E\,(y_t/\mathcal{F}_t) = \phi y_{t-1}$ et $Var\,(y_t/\mathcal{F}_t) = \sigma^2\,(y_{t-1} + \delta)^2 + \rho^2 y_{t-1}^2 = \sigma^2 + (\sigma^2 + \rho^2)\,y_{t-1}^2 + 2\delta y_{t-1}$. On peut alors observer de cette dernière formule que la variance conditionnelle du modèle $GRCA(1)$ est la même que celle d'un modèle $ARCH$ quadratique ($QARCH$, Sentana, 1995), ce qui permet au modèle de représenter notamment l'effet de levier et spécialement lorsque $\delta = -1$.

Dans ce qui suit, nous considérons les hypothèses suivantes :

A2 $\sigma^2 > 0$ et $\rho^2 > 0$.

A3 $E\left(\varepsilon_1^4\right) < \infty$ et $E\left(\xi_1^4\right) < \infty$.

A4 $\{(\varepsilon_t, \xi_t), t \in \mathbb{N}\}$ est Gaussien.

Pour étudier aisément la structure probabiliste du modèle (2.1), considérons sa version bilatérale

$$y_t = (\phi + \xi_t + \delta\varepsilon_t)y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

correspondant à $t \in \mathbb{Z}$. Soit $\gamma := E\left(\log|\phi + \xi_1 + \delta\varepsilon_1|\right)$ le plus grand exposant de Lyapunov associé à (2.2). Alors, le résultat suivant étudie l'existence de solutions de (2.2) et ainsi la stabilité de (2.1).

Théorème 2.1 *i) Considérons le modèle* (2.2) *soumis à* ***A1*** *et* ***A2****.*

- En supposant que $P\left(a\varepsilon_1 + b\xi_1 = c\right) < 1$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, *l'équation* (2.2) *admet une unique solution non-anticipative, strictement stationnaire et ergodique si et seulement si*

$$\gamma < 0. \tag{2.3}$$

- Une condition suffisante pour que (2.2) *admette une unique solution,* $\{y_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$, *non-anticipative, strictement stationnaire et ergodique avec* $E\left(|y_1|^r\right) < \infty$ *(*$r \in \mathbb{N}^*$*) est que* $E\left(|\phi + \xi_1 + \delta\varepsilon_1|^r\right) < 1$.

- Si de plus ***A4*** *est vérifiée alors le modèle* (2.1) *a la même distribution conditionnelle que le modèle autorégressif double suivant*

$$y_t = \phi y_{t-1} + \eta_t\sqrt{\sigma^2\left(y_{t-1} + \delta\right)^2 + \rho^2 y_{t-1}^2}, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

où $\{\eta_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *est un processus iid Gaussien avec* $E(\eta_1) = 0$ *et* $E(\eta_1^2) = 1$.

ii) Soit le modèle (2.1) *soumis à* ***A1*** *et* ***A2****. Alors,*

- Lorsque $\gamma < 0$, $y_t \underset{t\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} y_\infty$, $\forall y_0$, y_∞ *étant une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Lorsque $\gamma = 0$, $|y_t| \underset{t\to\infty}{\overset{p}{\to}} \infty$.

- Lorsque $\gamma > 0$ *et* $P\left(\varepsilon_1 + \left(\phi + \xi_1 + \delta\varepsilon_1\right)y_0 = c\right) = 0$ $\forall c \in \mathbb{R}$, *il existe* $\beta \in \left]0, 1\right[$ *tel que* $\beta^t|y_t| \underset{t\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \infty$.

Posons $\theta = (\sigma^2, \rho^2)'$ et soit $\lambda = (\phi, \theta')'$ le vecteur des paramètres de (2.1). Pour $u_t = \left(\xi_t + \delta\varepsilon_t\right)y_{t-1} + \varepsilon_t$, le modèle (2.1) peut se mettre sous une autorégression classique

$$y_t = \phi y_{t-1} + u_t, \qquad t \in \mathbb{N}^*, \tag{2.5}$$

avec $E\left(u_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) = 0$ et $Var\left(u_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) = \sigma^2\left(y_{t-1}+\delta\right)^2 + \rho^2 y_{t-1}^2 = h_t\left(\theta\right) = \mathcal{Y}_{t-1}\theta'$ où $\mathcal{Y}_{t-1} = \left(\left(y_{t-1}+\delta\right)^2, y_{t-1}^2\right)'$. Soit également $e_t = u_t^2 - E\left(u_t^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)$, alors le processus des carrés, $\left\{u_t^2, t\in\mathbb{N}^*\right\}$, vérifie quant à lui la régression suivante

$$u_t^2 = \mathcal{Y}_{t-1}\theta' + e_t, \qquad t\in\mathbb{N}^*, \tag{2.6}$$

avec $E\left(e_t/\mathcal{F}_{t-1}\right) = 0$.

3 Estimation des moindres carrés pondérés en quatre étapes

Etant donné une série $y_1, y_2, ..., y_n$ générée à partir du modèle (2.1), nous proposons pour $\lambda = \left(\phi, \theta'\right)'$ un estimateur des moindres carrés pondérés en quatre étapes, $\widehat{\lambda}_{1WLS} = \left(\widehat{\phi}_{1WLS}, \widehat{\theta}'_{1WLS}\right)'$, $\widehat{\lambda}_{2WLS} = \left(\widehat{\phi}_{2WLS}, \widehat{\theta}'_{2WLS}\right)'$, décrit comme suit :

Algorithme 3.1

Étape (1) *: Partant de la régression* (2.5), *ϕ est estimé au moyen de $\widehat{\phi}_{1WLS}$, donné conditionnellement à y_0 par*

$$\widehat{\phi}_{1WLS} = \left(\sum_{t=1}^{n}\frac{y_{t-1}^2}{\widetilde{\sigma}^2\left(y_{t-1}+\delta\right)^2+\widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2}\right)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{y_{t-1}y_t}{\widetilde{\sigma}^2\left(y_{t-1}+\delta\right)^2+\widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2}, \tag{3.1a}$$

où $\widetilde{\theta} = \left(\widetilde{\sigma}^2, \widetilde{\rho}^2\right)'$ est un vecteur de constantes positives connues.

Étape (2) *: Obtenir les résidus de la régression* (2.5),

$$\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_t(\widehat{\phi}_{1WLS}) = y_t - \widehat{\phi}_{1WLS}y_{t-1}, \qquad 1\leq t\leq n, \tag{3.2}$$

puis considérer la régression artificielle suivante, approximation de (2.6) *:*

$$\widetilde{u}_t^2 = \mathcal{Y}'_{t-1}\theta + \widetilde{e}_t, \qquad t\in\mathbb{N}^*, \tag{3.3}$$

à partir de laquelle, l'estimateur des moindres carrés, $\widehat{\theta}_{1WLS}$, pondéré par l'inverse du carré de la variance conditionnelle $h_t(\widetilde{\theta}) = \widetilde{\sigma}^2\left(y_{t-1}+\delta\right)^2 + \widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2$ évaluée en $\widetilde{\theta}$ est donné par

$$\widehat{\theta}_{1WLS} = \left(\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\left(\widetilde{\sigma}^2\left(y_{t-1}+\delta\right)^2+\widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2\right)^2}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}'_{t-1}\right)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathcal{Y}_{t-1}\frac{\widetilde{u}_t^2}{\left(\widetilde{\sigma}^2\left(y_{t-1}+\delta\right)^2+\widetilde{\rho}^2 y_{t-1}^2\right)^2}. \tag{3.1b}$$

Étape (3) *: Avec $\widehat{\theta}_{1WLS} = (\widehat{\sigma}^2_{1WLS}, \widehat{\rho}^2_{1WLS})'$, la pondération $h_t(\widetilde{\theta})$ dans* (3.1a) *est remplacée par la variance conditionnelle estimée, $h_t(\widehat{\theta}_{1WLS})$, ce qui donne l'estimateur suivant :*

$$\widehat{\phi}_{2WLS} = \left(\sum_{t=1}^{n}\frac{y_{t-1}^2}{\widehat{\sigma}^2_{1WLS}\left(y_{t-1}+\delta\right)^2+\widehat{\rho}^2_{1WLS}y_{t-1}^2}\right)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\frac{y_{t-1}y_t}{\widehat{\sigma}^2_{1WLS}\left(y_{t-1}+\delta\right)^2+\widehat{\rho}^2_{1WLS}y_{t-1}^2}. \tag{3.1c}$$

Étape (4) *: Obtenir les résidus $\widehat{u}_t$ de la régression* (2.5) *sur la base de* $\widehat{\phi}_{2WLS}$,

$$\widehat{u}_t = \widehat{u}_t(\widehat{\phi}_{2WLS}) = y_t - \widehat{\phi}_{2WLS}y_{t-1}, \qquad 1 \leq t \leq n, \tag{3.4}$$

puis introduire la régression :

$$\widehat{u}_t = \mathcal{Y}'_{t-1}\theta + \widehat{e}_t, \qquad t \in \mathbb{N}^*, \tag{3.5}$$

à partir de laquelle, $\widehat{\theta}_{2WLS}$, *pondéré plutôt par l'inverse du carré de la variance conditionnelle estimée,* $h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})$, *est donné par*

$$\widehat{\theta}_{2WLS} = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\left(\widehat{\sigma}^2_{1WLS}(y_{t-1}+\delta)^2+\widehat{\rho}^2_{1WLS}y^2_{t-1}\right)^2}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}'_{t-1}\right)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\mathcal{Y}_{t-1}\frac{\widehat{u}_t^2}{\left(\widehat{\sigma}^2_{1WLS}(y_{t-1}+\delta)^2+\widehat{\rho}^2_{1WLS}y^2_{t-1}\right)^2}. \tag{3.1d}$$

L'injection des pondérations dans la $1^{ère}$ et $2^{ème}$ étapes assure la convergence des estimateurs sans aucune restriction sur les moments du processus $\{y_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ et même indépendamment de l'hypothèse de stabilité. Quant à la $3^{ème}$ et $4^{ème}$ étapes, elles sont introduites pour améliorer l'efficacité des estimateurs obtenus à la $1^{ère}$ et $2^{ème}$ étapes, respectivement. En outre, on remarquera plus bas (Theoème 3.1) que les distributions asymptotiques des estimateurs de la $3^{ème}$ et $4^{ème}$ étapes ne dependent pas de $\widetilde{\theta}$.

Posons $\psi = (\phi, \rho^2)'$, $\widehat{\psi}_{1WLS} = (\widehat{\sigma}^2_{1WLS}, \widehat{\rho}^2_{1WLS})'$, $\widehat{\psi}_{2WLS} = (\widehat{\sigma}^2_{2WLS}, \widehat{\rho}^2_{2WLS})$,

$$\begin{aligned}
A(\lambda,\widetilde{\theta}) &= E_\infty\begin{pmatrix} \frac{y^2_{t-1}}{\left(\widetilde{\sigma}^2(y_{t-1}+\delta)^2+\widetilde{\rho}^2y^2_{t-1}\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(\widetilde{\sigma}^2(y_{t-1}+\delta)^2+\widetilde{\rho}^2y^2_{t-1}\right)^2}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}'_{t-1}\end{pmatrix}\\
B(\lambda,\widetilde{\theta}) &= E_\infty\begin{pmatrix} \frac{\left(\sigma^2(y_{t-1}+\delta)^2+\rho^2y^2_{t-1}\right)y^2_{t-1}}{\left(\widetilde{\sigma}^2(y_{t-1}+\delta)^2+\widetilde{\rho}^2y^2_{t-1}\right)^2} & \frac{y_{t-1}E(e_tu_t/\mathcal{F}_{t-1})}{\left(\widetilde{\sigma}^2(y_{t-1}+\delta)^2+\widetilde{\rho}^2y^2_{t-1}\right)^3}\mathcal{Y}'_{t-1} \\ \mathcal{Y}_{t-1}\frac{y_{t-1}E(e_tu_t/\mathcal{F}_{t-1})}{\left(\widetilde{\sigma}^2(y_{t-1}+\delta)^2+\widetilde{\rho}^2y^2_{t-1}\right)^3} & \frac{E\left(e_t^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)}{\left(\widetilde{\sigma}^2(y_{t-1}+\delta)^2+\widetilde{\rho}^2y^2_{t-1}\right)^4}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}'_{t-1}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le résultat suivant établit la consistance et normalité asymptotique de $\widehat{\lambda}_{1WLS}$ et $\widehat{\lambda}_{2WLS}$ indépendamment de l'hypothèse de stationnarité stricte et du vecteur de pondération $\widetilde{\theta}$.

Théorème 3.1 *Considérons le modèle* (2.1) *soumis aux hypothèses* ***(A1)***, ***(A2)*** *et* ***(A3)***.

i) Stationnarité stricte (stabilité) : Lorsque $\gamma < 0$, pour tout $\widetilde{\theta} > 0$,

$$i)\ \widehat{\lambda}_{1WLS} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \lambda, \qquad ii)\ \widehat{\lambda}_{2WLS} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \lambda. \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_{1WLS} - \lambda\right) &\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N\left(0, A^{-1}(\lambda,\widetilde{\theta})B(\lambda,\widetilde{\theta})A^{-1}(\lambda,\widetilde{\theta})\right).\\
\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda}_{2WLS} - \lambda\right) &\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N\left(0, A^{-1}(\lambda,\theta)B(\lambda,\theta)A^{-1}(\lambda,\theta)\right).
\end{aligned}$$

ii) Istabilité stricte : Lorsque $\gamma > 0$, pour tout $\widetilde{\theta} > 0$, (3.6) *se vérifie encore et*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\psi}_{1WLS} - \psi\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N\left(0, \Sigma\right), \qquad \sqrt{n}\left(\widehat{\psi}_{2WLS} - \psi\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N\left(0, \Sigma\right),$$

Σ étant une matrice donnée. On peut observer que lorsque $\gamma < 0$, $\widehat{\lambda}_{2WLS}$ a la même la distribution limite que le $QMLE$ de λ, et ce indépendamment du choix de $\widetilde{\theta}$. De même, dans le cas instable, $\widehat{\psi}_{1WLS}$ et $\widehat{\psi}_{2WLS}$ ont la même distribution que le $QMLE$ de ψ. Cependant, il apparaît que $\widehat{\sigma}^2_{1WLS}$ et $\widehat{\sigma}^2_{2WLS}$ sont inconsistants lorsque $\gamma > 0$.

Nous avons également proposé un estimateur de la variance asymptotique de $\widehat{\lambda}_{2WLS}$ qui est consistant dans les deux cas de stationnarité et de non stationnarité. Des procédures de tests de stationnarité stricte et au second ordre, similaire à celles proposées par Aue et Horvàth (2011) sont alors proposées. Enfin, nous avons étendu les résultats du Théorème 2.1 et Théorème 3.1 (mais seulement lorsque $\gamma < 0$) au cas d'un modèle $GRCA\,(p)$ d'ordre p donné par

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} (\phi_j + \xi_{jt} + \delta\varepsilon_t) y_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbb{N}^*,$$

où $y_0, ..., y_{1-p}$ sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\phi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., p)$, $\xi_t = (\xi_{1t}, ..., \xi_{pt})'$, et $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$, $\{\xi_t, t \in \mathbb{N}\}$ sont des processus iid, indépendants avec $E(\xi_1) = 0$, $E(\varepsilon_1) = 0$, $E(\xi_1 \xi_1') = \Omega > 0$ et $E(\varepsilon_1^2) = \sigma^2 > 0$.

Bibliographie

[1] Aknouche, A. (2013). Two-stage weighted least squares estimation of nonstationary random coefficient autoregressions. *Journal of Time Series Econometrics*, **5**, 25-47.
[2] Aue, A. et Horváth, L. (2011). Quasi-likelihood estimation in stationary and nonstationary autoregressive models with random coefficients. *Statistica Sinica*, **21**, 973-999.
[3] Hwang, S.Y. et Basawa, I.V. (1998). Parameter Estimation For Generalized Random Coefficient Autoregressive Processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **68**, 323-337.
[4] Sentana, E. (1995). Quadratic $ARCH$ models. *Review of Economics Studies*, **62**, 639-661.
[5] Tong, H. (1981). A note on a Markov bilinear stochastic process in discrete time. *Journal of Time Series Analysis*, **2**, 279-284.
[6] Zhao, Z.W. et Wang, D.H. (2012). Statistical inference for generalized random coefficient autoregressive model. *Mathematical and Computer Modelling*, **56**, 152-166.