Test de rupture dans les structures de variance admettant des variations continues

Hamdi Raïssi

IRMAR-INSA, 20 avenue des buttes de Coësmes, CS 70839, F-35708 Rennes Cedex 7, France, et E-mail: hamdi.raissi@insa-rennes.fr

Résumé. Le problème de détection de ruptures de la variance quand celle ci varie de façon continue dans le temps est étudié. Nous soulignons que les tests s'appuyant sur une spécification constante (ou constante par morceaux) ne peuvent pas distinguer les changements lisses des changements abrupts de la variance. En conséquence nous proposons une nouvelle procédure pour tester des ruptures de la variance prenant en compte des changements lisses de la variance.

Mots-clés. Erreurs non conditionnellement hétéroscédastiques, Rupture de variance.

Abstract. The problem of detecting variance breaks when the variance structure is smoothly time-varying is studied. It is highlighted that the tests based on (piecewise) constant specification of the covariance are not able to distinguish between smooth non constant variance and the case where an abrupt change is present. Consequently a new procedure for detecting variance breaks taking into account for smooth changes of the variance is proposed.

Keywords. Unconditionally heteroscedastic errors, Variance breaks.

1 Introduction

Le test de rupture de la variance pour les séries temporelles est l'objet de nombreuses études dans la littérature (voir par exemple Berkes, Horvàth et Kokoszka (2004) dans le cas univarié ou Aue *et al.* (2009) dans le cas multivarié). Ces tests s'appuyant sur l'hypothèse de variance constante sous l'hypothèse nulle ont un cadre restrictif puisqu'il ne prennent pas en compte des changements continus de la variance fréquemment observés en pratique. Le plus souvent les praticiens réduisent la période couverte par les observations ou considèrent une transformation logarithmique des données de sorte que les changements continus de la variance soient négligeables. Cependant dans bien des cas il est impossible de former des échantillons de taille satisfaisante pour mener des tests de rupture de la variance en supposant que les changements lisses de la variance sont négligeables. De même que dans les cas où la transformation logarithmique est possible, elle ne permet pas de corriger les changements lisses de la variance dans de nombreuses situations. Notons que les changements de la variance peuvent être souvent extrêmes pour des séries macroéconomiques par exemple. Ainsi nous montrons que le test pour la détection de la variance classique n'est pas en mesure de distinguer entre le cas où la variance est sujette à des changements continus et le cas où un changement abrupt de la variance est observé. Nous proposons en conséquence un test qui permet de résoudre ce problème.

2 Inadéquation des tests basés sur l'hypothèse stationnaire quand la variance évolue continument

Nous supposons que les observations $x_1, \ldots, x_n$ vérifient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} x_t &= a_{01}x_{t-1} + \ldots + a_{0p}x_{t-p} + u_t \\ u_t &= h_t \epsilon_t, \end{aligned}$$

où les a_{0i} vérifient $A(z) \neq 0$ pour tout $|z| \leq 1$ avec $A(z) = I_d - \sum_{i=1}^{p} a_{0i} z^i$. Les termes h_t peuvent varier dans le temps de sorte que la variance non conditionnelle des observations est non constante (voir l'hypothèse **A1** infra). Le processus (ϵ_t) est supposé iid gaussien de variance unité et tel que $E(\epsilon_t^4) < \infty$. Ainsi nous étendons les résultats classiques de Inclan et Tiao (1994) dans cette courte note. La méthodologie présentée peut également s'étendre aisément aux cas iid non gaussien ou dépendant étudiés dans Sanso, Aragó et Carrion (2004). Xu et Phillips (2008) ont proposé des estimateurs des paramètres autorégressifs $\sqrt{n}$-asymptotiquement distribués selon une loi normale dans un cadre permettant une variance non constante. Dans ce cas on peut établir que les erreurs u_t et les résidus d'estimation $\hat{u}_t$ sont asymptotiquement équivalents pour notre tâche. Ainsi nous considérerons uniquement les erreurs sans perte de généralité. Usuellement l'hypothèse que les h_t sont constants contre l'alternative de structure de variance constante par morceaux est testée en utilisant des tests basés sur des sommes cumulatives (CUSUM tests). Ainsi Inclan et Tiao (1994) ont considéré la statistique suivante:

$$S = \sup_k |\sqrt{n/2} D_k|, \quad k = 1, \ldots, n,$$

avec $D_k = \frac{C_k}{C_n} - \frac{k}{n}$, $C_k = \sum_{t=1}^{k} u_t^2$ et $D_0 = D_n = 0$. Sous des hypothèses additionnelles Inclan et Tiao (1994) montrent que $\sqrt{n/2} D_k$ suit asymptotiquement un pont brownien standard (voir Billingsley (1968) pour la définition d'un pont brownien).

Nous considérons le cas souvent plus réaliste où sous l'hypothèse nulle on suppose une variance non constante mais lisse, contre l'hypothèse alternative où la variance admet des changements abrupts. Pour cela nous utilisons l'approche développée par Dahlhaus

(1997). Dans la suite la partie entière d'un réel est notée [.].

Hypothèse A1: Conditions sous l'hypothèse nulle d'absence de changements abrupts. (i) Les h_t satisfont $h_{[Tr]} = g(r)$, avec $g(r) > 0$ fonction déterministe mesurable sur l'intervalle $(0,1]$, telle que $\sup_{r\in(0,1]} |g_{ij}(r)| < \infty$. (ii) La fonction $g(r)$ satisfait une condition de Lipschitz.

D'après **A1** nous devrions adopter une écriture triangulaire. Cependant les doubles indices ne sont pas reportés pour simplifier la notation. Les conditions dans **A1** constituent l'hypothèse nulle de notre problème de test. Sous l'hypothèse alternative nous supposons qu'en plus des évolutions lisses, il existe au moins un changement abrupt de la variance (voir **A1'** infra). La proposition suivante nous donne le comportement asymptotique de la statistique S sous l'hypothèse d'une structure de variance non constante mais continue.

Proposition 2.1 *Si on suppose que l'hypothèse* **A1** *est vérifiée, alors nous avons:*

$$S = O_p(1) + Cn^{\frac{1}{2}},$$

quand $n \to \infty$, et où $C > 0$ est une constante.

Notons que la statistique S est comparée à des valeurs critiques correspondant au supremum de la valeur absolue d'un pont brownien. Ainsi en présence d'une structure de variance qui évolue de façon lisse dans le temps, le test classique aura tendance à rejeter l'hypothèse d'absence d'une rupture en variance de manière erronée à mesure que la taille d'échantillon tend vers l'infini.

En pratique il est commun de réduire la taille de l'échantillon afin de rendre négligeables les évolutions lisses de la variance. Par exemple considérons le cas où le test de rupture de la variance est mené dans un sous échantillon de taille $n_\gamma = n^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$. Soit $\dot{r}_n \in (0,1)$ dont la position peut dépendre de n et

$$S^\gamma_{\dot{r}_n} = \sup_k |\sqrt{n_\gamma/2} D^\gamma_{k,\dot{r}_n}|, \quad k = 1,\dots,n_\gamma,$$

avec $D^\gamma_{k,\dot{r}_n} = \frac{C^\gamma_{k,\dot{r}}}{C^\gamma_{n_\gamma,\dot{r}_n}} - \frac{k}{n}$, $C^\gamma_{k,\dot{r}_n} = \sum_{t=[\dot{r}_n n]+1}^{[\dot{r}_n n]+k} u_t^2$. Sous l'hypothèse alternative de changements abrupts, le cadre suivant est utilisé:

Hypothèse A1': Conditions sous l'hypothèse alternative de changements abrupts. Nous supposons que la condition (i) de **A1** est vérifiée et que la fonction $g(\cdot)$ satisfait une condition Lipschitz par morceaux sur un nombre fini de sous intervalles qui partitionnent $(0,1]$.

Notons que plusieurs changements abrupts sont possibles d'après **A1'**. Dans les propositions suivantes nous donnons le comportement asymptotique de $D^\gamma_{k,\dot{r}_n}$.

Proposition 2.2 *Si on suppose que l'hypothèse* **A1** *est vérifiée, alors* $D^{\gamma}_{k,\dot{r}_n}$ *est asymptotiquement distribué selon un pont brownien standard.*

Proposition 2.3 *Si on suppose que l'hypothèse* **A1'** *est vérifiée telle que* $\dot{r}_n$ *soit choisi de façon à ce qu'il existe toujours au moins un changement abrupt dans l'échantillon ayant servi à calculer* $S^{\gamma}_{\dot{r}_n}$*, alors:*

$$S^{\gamma}_{\dot{r}_n} = O_p(1) + C' n^{\frac{1}{2}\gamma},$$

quand $n \to \infty$*, et où* $C' > 0$ *est une constante.*

Les résultats des Propositions 2.2 et 2.3 nous permettent de construire un test pour détecter les changements abrupts de la variance dans un sous ensemble où les changements lisses de la variance sont négligeables. Cependant certaines séries macro-économiques admettent des évolutions lisses trop importantes pour supposer que ces changements sont négligeables sur des tailles d'échantillons acceptables. Dans la prochaine section nous proposons un test modifié qui généralise cette approche et permet de tester la présence de changements abrupts de la variance même si ses évolutions lisses sont marquées.

3 Tester les ruptures de la variance en prenant en compte ses possibles évolutions continues

On suppose que l'on peut écrire

$$g^2(r) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_{i,r^0}(r - r^0)^i + o((r - r^0)^q)$$

pour un certain $q > 0$ et tout $r^0 \in (0, 1)$. De la même manière que précédemment nous prenons un échantillon de taille $n_\delta = n^\delta$, $0 < \delta < 1$. Pour obtenir potentiellement une meilleure précision, le milieu du sous échantillon $r^0_n = (2r_n + n_\delta)/2$ est utilisé dans la régression polynomiale suivante:

$$u_t^2 = \sum_{i=0}^{q} \alpha_{i,r^0_n}(t/n - r^0_n)^i + o\left((t/n - r^0_n)^q\right) + \xi_t, \tag{1}$$

avec $\xi_t = u_t^2 - E(u_t^2)$. En utilisant (1) l'ordre q peut être choisi en minimisant un critère AIC prenant en compte la variance non constante des erreurs (voir Raïssi (2014) pour un AIC dans un tel cadre). Comme nous considérons un sous échantillon de taille réduite on peut supposer qu'un ordre q relativement petit (typiquement $q = 1, 2$ ou 3) décrit les évolutions lisses de la variance de façon satisfaisante. Pour $q = 0$ il est préférable d'utiliser le test standard décrit dans la section précédente. Notons par $\hat{\alpha}_{i,r^0_n}$ les estimateurs des moindres carrés et $\hat{g}^2(r)$ la structure de variance estimée. On peut montrer que les $\hat{\alpha}_{i,r^0_n}$ sont des estimateurs convergents des α_{i,r^0_n}, de sorte que la regression polynomiale nous donne une approximation lisse de la structure de variance. Supposons que l'on ait $g^2(r) > c > 0$, de façon que $\hat{g}^2(r) > c > 0$ pour n assez grand. Soit la statistique de test:

$$\bar{S}^{\delta}_{\dot{r}_n} = \sup_k |1/\sqrt{2n}\bar{D}^{\delta}_{k,\dot{r}_n}|, \quad k = 1, \ldots, n,$$

avec $\bar{D}^{\delta}_{k,\dot{r}_n} = \bar{C}^{\delta}_{k,\dot{r}} - \frac{k}{n}$, $\bar{C}^{\delta}_{k,\dot{r}} = \sum_{t=[\dot{r}_n n]+1}^{[\dot{r}_n n]+k} \hat{g}^{-2}([t/n])u_t^2$. Ainsi nous proposons d'utiliser une statistique corrigée des changements lisses de la variance sous l'hypothèse nulle. Si on suppose qu'il existe des changements abrupts de la variance, nous voyons que ceux ci ne peuvent pas être pris par l'estimation polynomiale (1). Les propositions suivantes explicitent le comportement asymptotique de la statistique $\bar{S}^{\delta}_{\dot{r}_n}$.

Proposition 3.1 *Si on suppose que l'hypothèse* **A1** *est vérifiée, alors* $\bar{D}^{\delta}_{k,\dot{r}_n}$ *est asymptotiquement distribué selon un pont brownien standard.*

Proposition 3.2 *Si on suppose que l'hypothèse* **A1'** *est vérifiée telle que* $\dot{r}_n$ *soit choisi de façon à ce qu'il existe toujours au moins un changement abrupt dans l'échantillon ayant servi à calculer* $S^{\delta}_{\dot{r}_n}$*, alors:*

$$\bar{S}^{\delta}_{\dot{r}_n} = O_p(1) + C' n^{\frac{1}{2}\delta},$$

quand $n \to \infty$*, et où* $C' > 0$ *est une constante.*

En utilisant les Propositions 3.1 et 3.2 nous pouvons construire un test valide pour détecter les changements abrupts de la variance, même si ses changements lisses ne peuvent pas être décrits de façon satisfaisante par une constante. Notons que la statistique de test est comparée à des valeurs critiques usuelles du supremum d'un pont brownien.

Bibliographie

[1] Aue, A., Hörmann S., Horvàth L. and Reimherr, M. (2009), Break detection in the covariance structure of multivariate time series models, *Annals of Statistics* 37, 4046-4087.
[2] Berkes, I., Horvàth, L., and Kokoszka, P. (2004), Testing for parameter constancy in GARCH(p,q) models, *Statistics and Probability Letters* 70, 263-273.
[3] Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, New York: John Wiley.
[4] Dahlhaus, R. (1997), Fitting time series models to nonstationary processes, *Annals of Statistics* 25, 1-37.
[5] Inclan, C., and Tiao, G.C. (1994), Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance, *Journal of the American Statistical Association* 89, 913-923.
[6] Sanso, A., Aragó, V., and Carrion, J.L. (2004), Testing for changes in the unconditional variance of financial time series, *Revista de Economia Financiera* 4, 32-53.
[7] Xu, K.L., and Phillips, P.C.B. (2008), Adaptive estimation of autoregressive models with time-varying variances, *Journal of Econometrics* 142, 265-280.