

# UN TEST NON PARAMÉTRIQUE DE DÉTECTION DE RUPTURES DANS LA COPULE D'OBSERVATIONS FORTEMENT MÉLANGEANTES FONDÉ SUR LE RHO DE SPEARMAN MULTIVARIÉ

Tom Rohmer <sup>1</sup> & Ivan Kojadinovic <sup>1</sup> & Jean-François Quessy <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de mathématiques et applications, UMR CNRS 5142*

*Université de Pau et des Pays de l'Adour*

*B.P. 1155, 64013 Pau Cedex, France*

*{ivan.kojadinovic, tom.rohmer}@univ-pau.fr*

<sup>2</sup> *Département de mathématiques et d'informatique,*

*Université du Québec à Trois-Rivières,*

*Trois-Rivières (QC) G9A 5H7, Canada.*

*jean-francois.quessey@uqtr.ca*

**Résumé.** Étant donnée une suite d'observations multivariées, nous proposons un test non paramétrique de détection de rupture particulièrement sensible à des ruptures dans la copule des observations. La statistique de test considérée est fondée sur une extension multivariée du rho de Spearman et résulte d'une transposition de l'approche "CUSUM" classique au contexte étudié. La validité asymptotique du test est démontrée sous des hypothèses de mélange fort sur les données. Le test obtenu améliore la proposition quelque peu similaire de Wied et al. (2013) en terme de puissance.

**Mots-clés.** Données fortement mélangeantes, estimation de la variance asymptotique, processus de copule empirique séquentiel, rééchantillonnage à base de multiplicateurs, rho de Spearman.

**Abstract.** Given a sequence of multivariate observations, we propose a nonparametric test for change-point detection particularly sensitive to changes in the copula of the observations. The test statistic is based on a multivariate extension of Spearman's rho and merely follows from a transposition of the classical "CUSUM" approach to the context under consideration. The asymptotic validity of the test is established under strong mixing. The resulting test improves the recent and similar proposal of Wied et al. (2013) in terms of power.

**Keywords.** Asymptotic variance estimation, multiplier bootstrap, sequential empirical copula process, Spearman's rho, strong mixing.

## Description

Soit  $\mathbf{X}$  un vecteur aléatoire de dimension  $d$  de fonction de répartition (f.d.r.)  $F$  et dont les marges, notées  $F_1, \dots, F_d$ , sont continues. Les travaux de Sklar (1959) nous permettent alors d'écrire  $F$  comme suit :

$$F(\mathbf{x}) = C\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}, \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^d,$$

où la fonction  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  est une f.d.r. sur  $[0, 1]^d$  dont les marges sont uniformes. La fonction  $C$ , qui est unique sous l'hypothèse de continuité de  $F_1, \dots, F_d$ , est communément appelée *copule* et détermine la dépendance entre les composantes de  $\mathbf{X}$ .

Étant donnée une suite  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  de vecteurs aléatoires de dimension  $d$  et de marges supposées continues, l'objectif de nos travaux est de développer une méthodologie statistique non paramétrique pour la *détection de rupture* permettant de tester l'hypothèse

$$H_0 : \exists F \text{ telle que } \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \text{ aient } F \text{ pour f.d.r.}$$

Sous les hypothèses considérées,  $H_0$  peut être réécrite comme  $H_{0,m} \cap H_{0,c}$ , où

$$\begin{aligned} H_{0,m} &: \exists F_1, \dots, F_d \text{ telles que } \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \text{ aient pour marges } F_1, \dots, F_d, \\ H_{0,c} &: \exists C \text{ telle que } \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \text{ aient pour copule } C. \end{aligned}$$

Les tests non paramétriques classiques permettant de tester  $H_0$  sont fondés sur les processus empiriques séquentiels (voir par ex. Bai, 1994; Csörgő and Horváth, 1997). Ces tests s'avèrent néanmoins peu puissants dans le cas d'échantillons de tailles modérées et lorsque l'hypothèse alternative ne concerne qu'un changement dans la copule, c-à-d, sous  $H_{0,m} \cap (\neg H_{0,c})$  (voir par ex. Holmes et al., 2013, Section 4). Nos travaux visent à remédier à cette situation et portent sur la mise au point de tests non paramétriques de détection de rupture particulièrement sensibles à des changements dans la copule. Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce travail à un test fondé sur diverses extensions multivariées du rho de Spearman (voir par ex. Schmid and Schmidt, 2007) pouvant s'écrire en tant que fonction de la copule  $C$ . La statistique de test résulte simplement d'une transposition de l'approche "CUSUM" classique et s'écrit

$$S_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{n} \frac{k(n-k)}{n^2} |\rho_{1:k} - \rho_{k+1:n}|,$$

où pour  $1 \leq k \leq l \leq n$ ,  $\rho_{k:l}$  est le rho de Spearman multivarié estimé à partir du sous échantillon  $\mathbf{X}_k, \dots, \mathbf{X}_l$  et peut s'exprimer en fonction de la *copule empirique*  $C_{k:l}$  (voir par ex. Deheuvels, 1981) du sous échantillon, définie par

$$C_{k:l}(\mathbf{u}) = \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^l \mathbf{1}(\hat{U}_i^{k:l} \leq \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^d,$$

avec

$$\hat{U}_i^{k:l} = \frac{1}{l - k + 1} (R_{i1}^{k:l}, \dots, R_{id}^{k:l}), \quad i \in \{k, \dots, l\},$$

et  $R_{ij}^{k:l}$  le rang de  $X_{ij}$  dans  $X_{kj}, \dots, X_{lj}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

D'un point de vue pratique, deux versions du test sont considérées : une première version consiste à estimer le paramètre inconnu de la loi limite de  $S_n$  sous  $H_0$  et à utiliser cette loi estimée pour calculer une p-valeur asymptotique ; la seconde version utilise un ré-échantillonnage fondé sur des multiplicateurs dépendants (Bücher and Kojadinovic, 2013) et calcule une p-valeur approchée empiriquement.

La validité asymptotique des deux versions du test est démontrée sous des hypothèses de mélange fort sur les données.

Le test obtenu est une alternative au test fondé sur le tau de Kendall développé par Dehling et al. (2013) et améliore la proposition similaire de Wied et al. (2013) qui utilise des rangs calculés sur l'échantillon complet  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  et non des rangs calculés sur chaque sous échantillon  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$  et  $\mathbf{X}_{k+1}, \dots, \mathbf{X}_n$  pour  $k$  variant de 1 à  $n - 1$ .

Dans cette présentation, des simulations de Monte Carlo à tailles modérées seront présentées pour diverses copules, sous l'hypothèse  $H_0$  et sous différents types d'alternatives.

## Références

- J. Bai. Weak convergence of the sequential empirical processes of residuals in ARMA models. *The Annals of Statistics*, 22(4) :2051–2061, 1994.
- A. Bücher and I. Kojadinovic. A dependent multiplier bootstrap for the sequential empirical copula process under strong mixing. *arXiv :1306.3930*, 2013.
- M. Csörgő and L. Horváth. *Limit theorems in change-point analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- P. Deheuvels. A non parametric test for independence. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 26 :29–50, 1981.
- H. Dehling, D. Vogel, M. Wendler, and D. Wied. An efficient and robust test for a change-point in correlation. *arXiv :1203.4871*, 2013.
- M. Holmes, I. Kojadinovic, and J-F. Quessy. Nonparametric tests for change-point detection à la Gombay and Horváth. *Journal of Multivariate Analysis*, 115 :16–32, 2013.

- F. Schmid and R. Schmidt. Multivariate extensions of Spearman's rho and related statistics. *Statistics & Probability Letters*, 77(4) :407–416, 2007.
- A. Sklar. Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8 :229–231, 1959.
- D. Wied, H. Dehling, M. van Kampen, and D. Vogel. A fluctuation test for constant Spearman's rho with nuisance-free limit distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, page in press, 2013.