LA MÉTHODE COMBINATOIRE (S) POUR LA CONSTRUCTION DES PLANS EN BLOCS INCOMPLETS PARTIELLEMENT EQUILIBRÉS ET LE R-PACKAGE COMBINS ASSOCIÉ

Imane Rezgui [1] & Z. Gheribi-Aoulmi [2]

[1] *Département de Mathématiques, Constantine 1, Algérie.*
rezgui_imane@yahoo.fr
[2] *Département de Mathématiques, Constantine 1, Algérie.*
gheribiz@yahoo.fr

Résumé. La configuration des plans d'expériences en blocs incomplets partiellement équilibrés ($PBIPE$) a toujours été un problème malgré l'existence de plusieurs méthodes de construction. La méthode à partir de schémas d'association accommodée de la méthode combinatoire (s) très maniable, sont reprises pour fournir une série de plans en blocs partiellement équilibrés. En outre, un R- package CombinS a été développé pour rendre accessible et applicable ces méthodes de construction qui se distinguent par le nombre (m) de classes associées m= 2,...,5 ou 7. L'exécution de chaque fonction de CombinS offre la configuration et les paramètres des plans (PBIPE) associés à ces méthodes.

Mots-clés. Plan en blocs incomplets partiellement équilibrés, Schéma d'association, Méthode Combinatoire (s).

Abstract. The configuration of partially balanced incomplete block (PBIB) designs has always been a problem although the existence of several methods of construction. The method from the association schemes accommodated by the Combinatory method (s) very easy to use, are included to provide a series of partially balanced incomplete block (PBIB) designs. In addition, a R-package CombinS was then developed to make these construction methods accessible and applicable that differ in the number (m) of associated classes m = 2,..., 5 or 7. The execution of each function of CombinS provides the configuration and the parameters of the PBIB designs associated with these methods.

Keywords. Partially balanced incomplete block design, association scheme, Combinatory methods.

1 Introduction

La construction des plans d'expériences numériques continue à susciter la curiosité des scientifiques. Parmi les diverses méthodes de construction de ces plans, les plans classiques qui satisfont certaines propriétés combinatoires peuvent être utilisés comme plans de base (par exemple [2]). Dans notre papier, nous proposons une série de plans en blocs incomplets partiellement équilibrés construits à partir d'une méthode combinatoire dite "Méthode Combinatoire (s)" agencée à des schémas d'association, rendant ainsi leur construction très aisée. Nous développons un R-package "CombinS" pour l'obtention facile de la configuration de chacun de ces plans.

Description de la méthode Combinatoire (s) [4]:

Soit $v = nl$ traitements rangés dans un tableau de n lignes et l colonnes comme suit:

a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1l}
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2j}	$\ldots$	a_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{il}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nj}	$\ldots$	a_{nl}

Considérons s traitements différents de la même ligne i $(2 \leq s \leq l)$ et associons les à s autres traitements d'une autre ligne i' $(i \neq i')$, en respectant la correspondance entre les traitements a_{ij} et $a_{i'j}$. Juxtaposons les $2s$ traitements dans un même bloc et faisons toutes les combinaisons possibles, nous obtenons alors un plan en PBIPE de taille $k = 2s$ dont le nombre de classes associées dépend du s choisi.

Un plan divisible en groupes est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association divisible en groupes [1].
Un plan divisible en groupes emboités est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association divisible en groupe emboité [1].
Un plan rectangulaire est un $PBIPE$ sur un schéma d'association rectangulaire [6].
Un plan rectangulaire à angles droits $PBIPE_m$ (m=4,5,7) est un $PBIPE$ basé sur un schéma d'association rectangulaire à angles droits (m) [4].

2 Construction des PBIPE utilisant la méthode Combinatoire (s)

2.1 Les plans divisibles en groupes

Soient $v = nl$ traitements rangés dans un tableau de n lignes et l colonnes. On applique la méthode Combinatoire (s) avec $s = l$ à ce tableau, on obtient un plan divisible en groupes à deux classes associées de paramètres suivants:

$$v = n.l, b = n(n-1)/2, r = \lambda_1 = (n-1), k = 2l, \lambda_2 = 1.$$

2.2 Les plans rectangulaires

Soient $v = nl$ traitements rangés dans un tableau de n lignes et l colonnes. On applique la méthode Combinatoire (s) avec s choisi dans $\{2, \ldots, \text{l-1}\}$ à ce tableau, on obtient un plan rectangulaire à trois classes associées de paramètres suivants:
$v = nl, b = n(n-1)C_s^l/2, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}$.

2.3 Les plans divisibles en groupes emboités

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. On applique la méthode combinatoire (s) avec $s = l$ à chaque tableau. L'ensemble de tous les blocs donne un plan divisible en groupes emboités à trois classes associées avec les paramètres suivants:

$$v = 2nl, b = n(n-1), r = (n-1), k = 2l, \lambda_1 = (n-1), \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.$$

2.4 Les plans rectangulaires à angles droits $PBIPE_4$

2.4.1 Première méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{2, \ldots, \text{l-1}\}$ à chaque tableau. L'ensemble de tous les blocs nous donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIPE_4$ à quatre classes associées de paramètres suivants:

$$v = 2nl, b = n(n-1)C_s^l, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1},$$
$$\lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}, \lambda_4 = 0.$$

2.4.2 Deuxième méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. Soit $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, ..., a_{nj}^{(g)})'$ la j^{eme} colonne du g^{eme} tableau $g \in \{1, 2\}$. On définie $C_j^{(g)1} = C_j$ pour $h = 1$ et $C_j^{(g)h} = (a_{hj}^{(g)}, a_{(h+1)j}^{(g)}, \ldots, a_{nj}^{(g)}, a_{1j}^{(g)}, \ldots, a_{(h-1)j}^{(g)})'$ pour $h = 2, 3, ..., n$ $(g \in \{1, 2\})$. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{3, \ldots, \text{l+1}\}$ à chaque tableau de le forme $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$ $(g' \neq g \in \{1, 2\})$ pour $j = 1, \ldots, l$, $h = 1, \ldots, n$ et $g \in \{1, 2\}$, on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenant une composante de la colonne $C^{(g)h}$. L'ensemble de tous les blocs donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_4$ à quatre classes associées de paramètres suivants:

$$v = 2nl, b = ln^2(n-1)C_{s-1}^l, r = n(n-1)[C_{s-1}^l + lC_{s-2}^{l-1}], k = 2s, \lambda_1 = ln(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$
$$\lambda_2 = n[C_{s-1}^l + lC_{s-2}^{l-1}], \lambda_3 = nlC_{s-3}^{l-2}, \lambda_4 = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}.$$

2.5 Les plans rectangulaires à angles droits $PBIPE_5$

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. Soit $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, ..., a_{nj}^{(g)})'$ la j^{eme} colonne du g^{eme} tableau $g \in \{1, 2\}$. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{3, \ldots,$ l+1$\}$ à chaque tableau de le forme $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$ $(g' \neq g \in \{1, 2\})$ pour $j = 1, \ldots, l$ et $g \in \{1, 2\}$, on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenant une composante de la colonne $C^{(g)}$. L'ensemble de tous les blocs donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_5$ à cinq classes associées de paramètres suivants:

$$v = 2nl, b = ln(n-1)C_{s-1}^{l}, r = (n-1)[C_{s-1}^{l} + lC_{s-2}^{l-1}], k = 2s, \lambda_1 = l(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$
$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l} + lC_{s-2}^{l-1}, \lambda_3 = lC_{s-3}^{l-2}, \lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}, \lambda_5 = 2C_{s-2}^{l-1}.$$

2.6 Les plans rectangulaire à angles droits $PBIPE_7$

2.6.1 Première méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{2, \ldots,$ l-1$\}$ à chaque tableau. On obtient alors deux ensembles de blocs. La juxtaposition des blocs du premier ensemble avec ceux du second ensemble, de telle sorte que les blocs contenant le traitement a_{ij} et $a_{i'j}$ sont placés côte à côte, donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ à sept classes associées avec les paramètres suivants:

$$v = 2nl, b = \frac{n(n-1)}{2}C_{s}^{l}, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1} = \lambda_4, k = 4s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2} = \lambda_5,$$
$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} = \lambda_6, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2} = \lambda_7.$$

2.6.2 Deuxième méthode de construction

Soient $v = 2nl$ traitements rangés dans deux tableaux de n lignes et l colonnes chacun. Soient $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, ..., a_{nj}^{(g)})'$ la j^{eme} colonne du g^{eme} tableau et $R_i^{(g)} = (a_{i1}^{(g)}, a_{i2}^{(g)}, ..., a_{il}^{(g)})$ la i^{eme} ligne du g^{eme} tableau pour $g \in \{1, 2\}$. On applique la méthode combinatoire (s) avec s choisi dans $\{3, \ldots,$ l$\}$ à chaque tableau de la forme $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} n C_j^{(g')}]$ $(g' \neq g \in \{1, 2\})$ pour $j = 1, \ldots, l$ et $g \in \{1, 2\}$, on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenant une composante de la colonne $C^{(g)h}$. D'autre part, On applique la méthode combinatoire (s) avec le même s à chaque tableau de le forme $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} n R_i^{(g')}]$ $(g' \neq g \in \{1, 2\})$ pour $i = 1, \ldots, l$ et $g \in \{1, 2\}$, on considère uniquement les combinaisons de s traitements contenants une composante de la ligne $R_i^{(g)}$. L'ensemble de tous les blocs donne un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ à sept classes associées de paramètres suivants:

$$v = 2nl, b = n(n-1)[C_{s-1}^{l-1}l + 2C_{s}^{l}], r = (n-1)[3C_{s-1}^{l-1} + (l-1)C_{s-2}^{l-2}], k = 2s,$$
$$\lambda_1 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2} + (l-2)C_{s-3}^{l-3}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} + (l-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_3 = (l-2)C_{s-3}^{l-3}, \lambda_4 = 0,$$
$$\lambda_5 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_6 = 2C_{s-1}^{l-1}, \lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}.$$

3 Le R-package CombinS

Le R-package CombinS [3] est composé d'une série de fonctions suivantes :
-$CombS$
-$PBIB4a$
-$PBIB4b$
-$PBIB5$
-$PBIB7a$
-$PBIB7b$

Les arguments de chaque fonction sont :
(i) n: nombre de lignes du tableau des traitements.
(ii) l: nombre de colonnes du tableau des traitements.
(iii) s: le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.

3.1 CombS

La fonction $CombS$ correspondant à la méthode combinatoire (s) décrite ci-dessus.

3.1.1 CombS pour les plans rectangulaires

La fonction $CombS$, avec s choisi dans {2, ...,l-1}, offre une configuration d'un plan rectangulaire et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$).

3.1.2 CombS pour les plans divisibles en groupes

La fonction $CombS$, avec $s = l$, offre une configuration d'un plan divisible en groupes et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, 2\}$).

3.2 PBIB4a

La fonction $PBIB4a$ correspond à la méthode de construction de la méthode Combinatoire (s) appliquée à deux tableaux ($n \times l$) chacun.

3.2.1 PBIB4a pour les plans divisibles en groupes emboités

La fonction $PBIB4a$, avec $s = l$, offre une configuration d'un plan divisible en groupes emboités et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$).

3.2.2 PBIB4a pour les plans rectangulaires à angles droits $PBIB_4$

La fonction $PBIB4a$, avec s choisi dans {3, ...,l-1}, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_4$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \ldots, 4\}$).

3.3 PBIB4b

La fonction $PBIB4b$ correspond à la deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_4$.
La fonction PBIB4b, avec s choisi dans {3,. . . ,l+1}, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_4$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$).

3.4 PBIB5

La fonction $PBIB5$ correspond à la méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_5$.
La fonction $PBIB5$, avec s choisi dans {3,. . . ,l+1}, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_5$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \dots, 5\}$).

3.5 PBIB7a

La fonction $PBIB7a$ correspond à la première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_7$.
La fonction $PBIB7a$, avec s choisi dans {3,. . . ,l-1}, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \dots, 7\}$).

3.6 PBIB7b

La fonction $PBIB7b$ correspond à la deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIB_7$.
La fonction $PBIB7a$, avec s choisi dans {3,. . . ,l-1}, offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits $PBIB_7$ et ses paramètres: v, b, r, k, λ_i ($i \in \{1, \dots, 7\}$).

4 Conclusion

Dans notre papier, nous avons décrit quelques méthodes de construction de plans en blocs incomplets équilibrés à 2,. . . ,5 et 7 classes associées directement à partir de leurs schémas d'association et la "Méthode Combinatoire (s)". Par ailleurs, nous avons reformulé ces méthodes sous forme de fonctions d'un R- package "CombinS " donnant leur configuration et rendant ainsi accessible leur usage à tout utilisateur. Les plans obtenus peuvent servir à la construction de nouveaux plans numériques.

Bibliographie

[1] Bhagwandas, Sinha, K. and Kageyama, S. (1992), Constructions of PBIB designs based on nested group divisible association schemes. Utilitas Mathematica, 41, 169-174.

[2] Fang K.T., Ge G. N., Liu M. (2004), Construction of uniform designs via super-simple resolvable t-designs, Utilitas Mathematica, 66, 15-32.
[3] Laib M., Rezgui I., Gheribi-Aoulmi Z. and Monod H. (2013), CombinS. R package version 1.0. http://CRAN.R-project.org/package=CombinS.
[4] Rezgui I. , Gheribi-Aoulmi Z. and Monod H. (2013), New association schemes with 4, 5 and 7 associate classes and their associated partially balanced incomplete block designs, Advances and Applications in Discrete Mathematics, 12, 207 - 215.
[5] Rezgui I. and Gheribi-Aoulmi Z. (2014), New Construction Method of Rectangular PBIB Designs and Singular Group Divisible Designs, Journal of Mathematics and Statistics, 10, 45-48.
[6] Vartak M.N., (1955), On an application of Kronecker product of Matrices to Statistical designs, Ann. Math. Stat., 26, 420-438.