Approximation par Processus de Diffusion de Modeles Epidemiques Stochastiques en Environnement Aleatoire

Sidali Becheket [1], Tewfik Kernane [1] & Hamid Elmaroufy [2]

[1] *Département de Probabilités et Statistique, Faculté des Mathématiques, Université des Sciences et de la Technologie USTHB, Alger, Algérie*
sbecheket@etu.usthb.dz; tkernane@usthb.dz
[2] *Faculté des Sciences et Technologie de Beni-Mellal FSTBM, Maroc*
maroufy@fstbm.ac.ma

Résumé. On considère un modèle épidémique stochastique de type SIS. Dans ce modèle, les individus de la population sont classé en S (Susceptible ou état sain) et I (Infecté). Dans ce travail, on considère l'approximation par processus de diffusion du modèles épidémique stochastique SIS en environnement aléatoire.

Mots-clés. Modèle épidémique SIS, Environnement aléatoire, Approximation par processus de diffusion

Abstract. We consider the SIS epidemic model. In this model, the individuals in a population are classified into S (Susceptible or healthy state) and I (Infected). In this work, we consider diffusion approximation of stochastic (SIS) epidemic model in random environment.

Keywords. SIS epidemic model, random environment, Diffusion approximation

1 Introduction

L'approximation par processus de diffusion a été utilisée par plusieurs chercheurs pour modéliser la dynamique des épidémies (Voir par exemple Dargatz (2007) et Elmaroufy *et* al. (2013)). Un des modèles les plus important pour la propagation des épidémies est le modèle SIS. Dans ce modèle typique de propagation d'épidémie, les individus de la population sont classé en S (Susceptible ou état sain) et I (Infecté). Dans ce travail, on considère l'approximation par processus de diffusion du modèle épidémique stochastique SIS en environnement aléatoire. Un algorithme de simulation est proposé et son implémentation en logiciel R est effectuée.

2 Modèle SIS en environnement aléatoire

Le modèle $SIS-re$ est une chaîne de Markov à temps continu (CTMC): $X(t) = \{I(t), E(t); t \geq 0\}$ à espace d'états $S = \{0, ..., N\} \times S_E$. $\{E(t); t \geq 0\}$ est une CTMC irréductible à espace d'états $S_E = \{1, ..., E\}$ et de générateur infinitésimal

$$Q_E = (q_E(e, e'))_{1 \leq e, e' \leq E}.$$

Le temps de séjours dans l'état $e \in E$ suit une loi exponentielle de paramètre $-q_E(e) = -q_E(e, e) = \sum_{e' \neq e} q_E(e, e')$.

A l'instant t, on a

$$\begin{array}{c} I(t) \text{ infectés} \\ S(t) = N - I(t) \text{ susceptibles.} \end{array}$$

Lorsque $I(t) = 0$, l'épidémie prendra fin.

Les transitions infinitésimales de $X(t)$ sont:

$$q_{(i,e)(i',e')} = \left\{ \begin{array}{cc} \lambda_i(e) & \text{si } (i', e') = (i+1, e) \\ \mu_i(e) & \text{si } (i', e') = (i-1, e) \\ q_E(e, e') & \text{si } (i', e') = (i, e'), e' \neq e \\ -q(i, e) & \text{si } (i', e') = (i, e) \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\}$$

où $q_{(i,e)} = \lambda_i(e) + \mu_i(e) + q_E(e)$ et $q_E(e) = -q_E(e, e) = \sum_{e' \neq e} q_E(e, e')$ pour $(i, e) \in S$ et $\lambda_0(e) = \lambda_N(e) = \mu_0(e) = 0$ pour $e \in S_E$.

Pour chaque état $(i, e) \in S$,

$$\lambda_i(e) = \frac{\beta_e}{N} i(N - i)$$

$$\mu_i(e) = \gamma_e i$$

3 Approximation par Processus de Diffusion

Notre objectif est l'approximation du modèle épidémique stochastique du type SIS en environnement aléatoire par une équation différentielle stochastique à changement de rythme Markovien. Une EDS à changement de rythme markovien est notée comme suit:

$$dY(t) = f(Y(t), t, E(t))dt + g(Y(t), t, E(t))dB(t) \tag{1}$$

où $\{E(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de Markov homogène et irréductible à espace d'états fini $S_E = \{0, 1, ..., E\}$ et de générateur infinitésimale Q_E de taux $q(e, e')$.

3.1 Première étape

Approximation du processus $\{Y(t) = \frac{I(t)}{N},\ t \geq 0\}$ (N est la taille de la population et $I(t)$ est le nombre d'inféctés à l'instant t) par un processus de diffusion pour chaque état "e" du processus $\{E(t); t \geq 0\}$.

3.2 Deuxième étape

Transition de l'équation différentielle stochastique dont la solution est le processus de diffusion déterminé dans la première étape vers une équation différentielle stochastique de type (1).

Soient T_n et T_{n+1} deux instants consécutifs où le processus $E(t)$ change d'états, donc: $\forall t \in [T_n, T_{n+1}[$ $E(t) = E(T_n) = e$, $e \in S_E$. On suppose que: $\forall t \in [T_n, T_{n+1}[$ le processus $I(t)$ est un processus de Markov dont les taux de transitions sont:

$$q_{ii'} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i(e) \text{ si } i' = i+1 \\ \mu_i(e) \text{ si } i' = i-1 \end{array} \right\}$$

alors:

si $T_n \leq t < t+h < T_{n+1}$

$$\begin{aligned} P(I(t+h) = i) = &(\lambda_{i-1}(e)h + \circ(h))\ P(I(t) = i-1) \\ &+ (\mu_{i+1}(e)h + \circ(h))\ P(I(t) = i+1) \\ &+ (1 - (\mu_i(e) + \lambda_i(e))h + \circ(h))\ P(I(t) = i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(I(t) = i) = &\lambda_{i-1}(e)\ P(I(t) = i-1) \\ &+ \mu_{i+1}(e)\ P(I(t) = i+1) \\ &- (\mu_i(e) + \lambda_i(e))\ P(I(t) = i) \end{aligned} \tag{2}$$

En remplaçant $I(t)$ par $Y(t) = \frac{I(t)}{N}$ dans (2) on obtient:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \lambda'_{x-\varepsilon}(e)P(x-\varepsilon,t) + \mu'_{x+\varepsilon}(e)P(x+\varepsilon,t) - \lambda'_x(e)P(x,t) - \mu'_x(e)P(x,t)$$

avec $\lambda'_x(e) = N\beta_e x(1-x)$, $\mu'_x(e) = N\gamma_e x$ et $\varepsilon = 1/N$. En prenant $\varepsilon \to 0$, on obtient:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\beta_e x(1-x) - \gamma_e x]P(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}[\beta_e x(1-x) + \gamma_e x]P(x,t). \tag{3}$$

L'équation de Focker-Planck (3) correspond au processus de diffusion qui est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dY(t) = [\beta_e Y(t)(1-Y(t)) - \gamma_e Y(t)]\ dt + \sqrt{[\beta_e Y(t)(1-Y(t)) + \gamma_e Y(t)]}\ dB(t)$$

où $B(t)$ est un mouvement Brownien standard

Proposition de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY(t) = [\beta_{E(t)} Y(t)(1-Y(t)) - \gamma_{E(t)} Y(t)]\ dt + \sqrt{[\beta_{E(t)} Y(t)(1-Y(t)) + \gamma_{E(t)} Y(t)]}\ dB(t) \tag{4}$$

$\forall t \in [t_0, T]$, comme un modèle qui régit l'évolution d'une épidémie de type SIS en environnement aléatoire.

4 Simulation

La simulation de l'équation (4) est basée sur la méthode d'Euler-Maruyama. Pour définir la solution approchée d'Euler-Maruyama, nous aurons besoin de la propriété de la chaîne de Markov incluse. Le Lemme 1.1 de [3] montre qu'en posant $E_k^\Delta = E(k\Delta)$ pour $\Delta > 0$ et $k \geq 0$. alors $\{E_k^\Delta,\ k = 0, 1, 2, ...\}$ est une chaîne de Markov discrète dont la matrice des probabilités de transition est donnée par:

$$P(\Delta) = (P_{ij}(\Delta))_{E\times E} = e^{\Delta Q_E} \tag{5}$$

Algorithme

1. calculer $P = e^{\Delta Q_E}$ (la matrice des probabilités de transition avec un pas égale à Δ)
2. poser $N = M$ (la taille de la trajectoire qu'on veut simuler)
3. poser $E_0^\Delta = e_0$ et $Y_0 = y_0$(initialisation de E_k^Δ et $Y(t)$)
4. pour k allant de 2 à M
4.1 tirer $E_k^\Delta = e_k$ à partir de (5)
5. pour k allant de 2 à M
5.1 calculer $Y_k = Y_{k-1} + f(Y_{k-1}, E_{k-1}^\Delta)\Delta + g(Y_{k-1}, E_{k-1}^\Delta)\Delta w_k$ (une approximation de $Y(k\Delta)$ où $\Delta w_k \sim N(0, \sqrt{\Delta})$)

Bibliographie

[1] Dargatz, C. (2007), A diffusion approximation for an epidemic model, Discussion paper // Sonderforschungsbereich 386 der Ludwig-Maximilians-Universität München, No. 517, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:19-epub-1882-3

[2] Elmaroufy H., Kernane T., Becheket S. and Ouddadj A. (2013), Bayesian inference for stochastic SIR epidemic model, 6th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (ERCIM 2013) 14-16 December 2013, Senate House, University of London, UK, 2013.

[3] Yuan, C, Glover W., (2006), Approximate solutions of stochastic differential delay equations with Markovian switching, Journal of Computational and Applied Mathematics 194 (2006) 207–226