Bornes et Inégalités pour le Processus Tamisé et le Processus de Réparation Imparfaite

Ghania SAIDI [1] & Amar AISSANI [2]

[1] *Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSSEA)*
11 Chemin Doudou Mokhtar, Ben-Aknoun, Alger, Algérie
E-mail: ghsaidi@yahoo.fr

[2] *Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB)*
BP 32 El Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie
E-mail: amraissani@yahoo.fr

Résumé. Nous présentons en premier lieu des inégalités pour le nombre moyen de points retenus dans un processus tamisé généré par un processus ordinaire de renouvellement de distribution générique F, et des bornes de type linéaire dans le cas de censures indépendantes.

Dans un second lieu, nous montrons que les classes *NBUFR*, *NBUFRA*, *sBt* et *NBU*-t_0 sont conservées dans le cas du processus de réparation imparfaite; ensuite des inégalités pour ce type de processus sont présentées. Nous présentons une illustration numérique.

Mots-clés. Processus tamisé, processus de réparation imparfaite, comparaison stochastique, fonction de renouvellement, mesure d'incertitude, *NBUE, HNBUE*.

Abstract. We present inequalities for the average number of points retained in thinning process generated from ordinary process with distribution function F and inequalities for imperfect repair process. The linear bounds are obtained for thinning process in the case of independent censures.

We prove that the *NBUFR*, *NBUFRA*, *sBt* and *NBU*-t_0 classes are preserved in the case of imperfect repair process. On the other hand, a numerical illustration is presented.

Keywords. Thinning process, imperfect repair process, stochastic comparison, renewal function, measure uncertainty, *NBUE, HNBUE* .

1 Introduction

Dans la littérature de fiabilité, nous nous intéressons beaucoup ces dernières années à certains processus stochastiques tels que le processus tamisé et le processus de réparation imparfaite. Pour les définitions de ces deux processus et pour plus de détails se reférer à Bon (1981), Brown & Proschan (1983), Block & Borges (1981) et Aissani (1997).

Nous donnons dans le théorème 1 des bornes de type linéaire dans le cas de censures indépendantes pour le nombre moyen de points retenus dans un processus tamisé généré par un processus ordinaire de renouvellement de distribution générique F en nous basant sur la théorie classique de renouvellement [Barlow & Proschan (1975)] ainsi que les bornes établies pour la fonction de renouvellement par Marshall (1973); et des bornes dans le cas où F est $NBUE$ en nous basant sur celles données par Barlow & Proschan (1975), F est $HNBUE$ en nous basant sur celles établies par Basu & Kirmani (1986).

Dans le théorème 2, nous montrons que les classes *NBUFR, NBUFRA, sBt, NBU*-t_0 sont conservées dans le cas du processus de réparation imparfaite.

Nous établissons d'autres inégalités similaires à celles établies par Ebrahim & Pellerey (1995) pour les mesures d'incertitudes de processus de réparation mineure.

Enfin, nous présontons un exemple de calcul des valeurs de la borne supérieure de la fonction de renouvellement pour la classe $HNBUE$ dans le cas du processus tamisé pour les différentes valeurs de p telles que $p \in]0, 1]$.

Modèle 1: Processus tamisé

Soient $X_1, X_2, ...$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes distribuées selon la distribution Bernouilli de paramètre p et $\{t_i\}$ un processus de renouvellement ordinaire de distribution de probabilité

$$F(x) = P\ \{t_i - t_{j-1} < x\}, \qquad -\infty < x < +\infty \text{ et } \forall j.$$

Si Ψ représente le nombre de points censurés successivement , alors N_p est un processus de renouvellement de distribution de probabilité

$$F_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\Psi = k)\ \ F^{(k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p\ \ (1-p)^k\ \ F^{(k+1)}(x),$$

où $F^{(k)}(.)$ est le $k - ème$ produit de convolution de $F(.)$.

La moyenne de ce processus est

$$\mu_p = E(X_p) = \frac{\mu}{p}, \qquad \text{où } \mu = E(X).$$

Modèle 2: Processus de réparation imparfaite

Considérons qu'un équipement est mis en fonctionnement à l'instant $t = 0$, et à chaque fois qu'une panne survient, il est réparé.

Si t est l'âge de l'équipement à l'instant de panne, alors avec une probabilité $p(t)$ il retourne à l'état "aussi bon que neuf" ou " as-good-as-new " (réparation complète ou parfaite). Avec une probabilité $q(t) = 1 - p(t)$, il retourne à un état fonctionnel, mais dont l'âge est celui qu'il avait à la date de panne (réparation imparfaite i.e. l'élément est rétabli dans les conditions qui précédaient immédiatemment la panne).

Les intervalles entre réparations complètes successives forment un processus de renouvellement ordinaire avec la distribution des inter-arrivées est donnée par

$$F_p(t) = 1 - \exp\left\{ -\int_0^t p(x)\,\overline{F}^{-1}(x)\,dF(x) \right\},\ \forall t \geq 0.$$

Si F a un taux de défaillance $\lambda(t)$, alors F_p a un taux de défaillance donné par

$$\lambda_p(t) = p(t)\,\lambda(t) \qquad \text{pour } t \geq 0;$$

$$\overline{F}_p(t) = \exp\left\{ -\int_0^t p(x)\,\lambda(x)\; dx \right\}.$$

2 Inégalités pour le processus tamisé

Soit $N_p(t)$ un processus tamisé à censures indépendantes, de paramètre p tel que $0 < p < 1$ et de distribution générique $F_p(x)$ donnée par la relation suivante

$$F_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k F^{(k+1)}(x),$$

Où $F^{(k)}(.)$ est le $k-ème$ produit de convolution de $F(.)$.

Notons $H_p(t) = E(N_p(t))$ le nombre moyen de points successivement retenus et introduisons d'autre part, les notations suivantes:

$$I_n(b,t) = \frac{t}{\mu_p} + b - b\overline{F}_p^{(n)}(t) - \sum_{k=1}^{n} \hat{F}_p * F_p^{(k-1)}(t) + \sum_{k=1}^{n} F_p^{(k)}(t).$$

$$I_1(b,t) = \frac{t}{\mu_p} + b - b\overline{F}_p(t) - \hat{F}_p(t) + F_p(t),$$

Où $\hat{F}_p(t) = \dfrac{1}{\mu_p} \int_0^t \overline{F}_p(u)du$ est la distribution d'équilibre du temps résiduel pour le processus tamisé, b une constante et $\mu_p = \int_0^\infty \overline{F}_p(u)du$ l'intervalle moyen entre les points successivement retenus.

De plus, on définit $A = \left\{ t \geq 0 : \overline{F}_p(t) > 0 \right\}$ et

$$b_l = \inf_{t \in A} \frac{F_p(t) - \hat{F}_p(t)}{\overline{F}_p(t)} \ ; \ b_u = \sup_{t \in A} \frac{F_p(t) - \hat{F}_p(t)}{\overline{F}_p(t)}.$$

Théorème 1:

(i) Pour tout F_p, $H_p(t) \geq \dfrac{t}{\mu_p} - \hat{F}_p(t)$ où $\mu_p = \dfrac{\mu}{p}$.

(ii) Si de plus F_p est NBUE, alors

$$\frac{t}{\mu_p} - 1 \leq H_p(t) \leq \frac{t}{\mu_p}.$$

(iii) Si F_p est HNBUE, alors

$$H_p(t) \leq \left(\frac{t}{\mu_p} \right) \alpha\left(t\right), \quad t \geq 0.$$

où $\alpha\left(t\right)$ est la solution de l'équation

$$\exp\left(\frac{t}{\mu_p}\right) - \left(\frac{\alpha t}{\mu_p}\right) \exp\left(\frac{t}{\mu_p}\right) = 1 + \left[\left(2 - \left(\frac{t}{\mu_p}\right)\right) \exp\left(\frac{t}{\mu_p}\right) - e \right] \ I^{(i)}_{(\mu_p, \infty)}$$

et $I^{(i)}_{(a,b)}$ représente la fonction indicatrice dans l'intervalle (a, b).

(iv) Si F_p est HNWUE, alors

$$H_p(t) \geq \frac{t}{\mu_p \left[1 - \exp\left(\dfrac{t}{\mu_p}\right) \right]} - 1, \quad t \geq 0.$$

(v) Pour tout F_p,

$$I_n(b_l, t) \leq H_p(t) \leq I_n(b_u, t),$$

où $I_n(b_l, t)$ est croissante en n pour $t \geq 0$, et $I_n(b_u, t)$ est décroissante.

De plus,

$$H_p(t) = \lim_{n \to \infty} I_n(b, t) \ \textit{ pour tout } b \in \mathbb{R}.$$

et pour $b_l < b < b_u$, on a

$$\begin{array}{ll} I_0\left(b, t\right) < I_1\left(b, t\right) & \textit{pour un certain } t. \\ I_0\left(b, t\right) > I_1\left(b, t\right) & \textit{pour un certain } t. \end{array}$$

En particulier, le premier encadrement possible est

$$\frac{t}{\mu_p} + b_l \leq H_p(t) \leq \frac{t}{\mu_p} + b_u.$$

3 Conservation de certaines lois dans le cas d'un processus de réparation imparfaite

Théorème 2: Les propriétés NBUFR, NBUFRA, sBt, NBU-t_0 sont conservées dans le cas d'un processus de réparation imparfaite si en particulier $p(t)$ monotone croissante ou si $p(t) = p = cte$.

4 Inégalités pour le processus de réparation imparfaite

Définition: La mesure d'incertitude d'une distribution est l'entropie définie par

$$H(f) = \int_0^\infty f(x) \log f(x)\, dx = -E(\log f(X)),$$

connue également comme la mesure d'information au sens de Shannon (1948).

Ebrahimi (1992) définit l'incertitude de la distribution du temps du composant d'âge t par

$$H(f;t) = 1 - \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^\infty f(x) \log \lambda(x)\, dx.$$

Si le composant a survécu jusqu'au temps t, $H(f;t)$, mesure l'incertitude moyenne contenue dans la densité conditionnelle de $X_t = X - t$ sachant que $X > t$, sur la prédictabilité du temps résiduel du composant.

Théorème 3:

Soit $\{N_p(t)\}$ un processus de réparation imparfaite de paramètre $p(t)$ et de distribution générique F, alors

(i) Si F est DFR et $p(t)$ est une fonction croissante, alors

$$X_p \leq_{LU} X \text{ i.e. } H(f_p;t) \leq H(f;t).$$

(ii) Si $p(t) \uparrow$ en t alors $H(f_p;t) - H(f;t)$ est croissante en t, pour tout $t \geq 0$.

(iii) Si $N_{p'}(t)$ est un processus de réparation imparfaite de paramètre $p'(t)$ et de distribution générique F' tel que:

(a) $p \leq_d p'$ i.e. $p(t) \leq p'(t),\ \forall t \geq 0$;

(b) $p(x)/p'(x)$ est croissante en x;

(c) F est DFR;

(d) $F \leq_{FR} F'$.

alors $X_p \leq_{LU} X_{p'}$.

Bibliographie

[1] Aissani, A. (1997), *Limit Distributions for Dependent Thinning of Dissipative Point Process*, Microelectron. Reliab., 37, N°2, 267-275.

[2] Alzaid, A. et Kim, J.S. et Proschan, F. (1991), *Laplace Ordering and its Applications*, J. Appl. Prob., 28, 16-130.

[3] Barlow, R.E. et Proschan, F. (1965), *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley, New-York.

[4] Barlow, R.E. et Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinrhart & Winston, Inc., New-York.

[5] Basu, A.P. et Kirmani, S.N.U.A (1986), *Some Results involving HNBUE Distributions*, J. Appl. Prob., 23, 1038-1044.

[6] Ebrahim, N. et Pellerey, F. (1995), *New Partial Ordering of Survival Functions based on the Notion of the Uncertainty*, J. Appl. Prob., 32, 202-211.

[7] Marshall, K.T. (1973), *Lineair Bounds on the Renewal Function*, S.I.A.M J. Appl. Math., 24, N°2, 245-250.

[8] Shaked, J. et Shanthikumar, N. (1994), *Stochastic Order and their Applications*, Academic Press, New-York.

[9] Stoyan, D. (1983), *Comparison Methods for Queueing Models and others Stochastics Models*, John Wiley, New-York.